УДК 517.18

Обобщение теоремы Н.Огата об абсолютной сходимости коэффициентов лакунарных рядов

The generalization of theorem N.Ogata about absolute convergence of factors lacunars of numbers

Шульгина-Таращук А.С., Толеуханова Р.Ж.

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Зерттеулердің қуатты әдісі болып периодты функцияларды лакунарлық қатарлар арқылы беруге негізделген гармониялық талдау табылады. Мақалада О.Састың теоремасы шығатын ең жақсы жуықтаулардың терминдеріндегі тригонометриялық жүйе бойынша лакунарлық қатарлардың жинақтылығының жеткілікті шарты алынған. Шарттың жағдайында Я.Р.Патадиа, В.М.Шах және Н.Огаталардың теоремалары қарастырылған.

In the article the sufficient condition of convergence lacunar numbers on trigonometrical system in terms of the best approaches from which O.Sasa's theorem follows is received, and in case of a condition J.R.Patadia, V.M.Shaha and N.Ogata's theorems turn out. The decomposition method abreast is an effective method of studying of functions, calculation and estimations of integrals, the decision of the every possible equations (algebraic, differential, integrated). A powerful method of research is the harmonious analysis based on representation of periodic functions lacunar by numbers.

Метод разложения в ряд является эффективным методом изучения функций, вычисления и оценок интегралов, решения всевозможных уравнений (алгебраических, дифференциальных, интегральных). Мощным методом исследования является гармонический анализ, основанный на представлении периодических функций лакунарными рядами.

Пусть $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π. Ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} e^{in_k x}$$

будем называть лакунарным рядом, где $\{n_k\}(k \in N)$ — строго увеличивающаяся последовательность натуральных чисел [1].

Строго увеличивающаяся последовательность $\{n_k\}(k \in N)$ натуральных чисел, как считают, удовлетворяет условию A: если $\sup_n P_2(n)$ конечен, где $P_2(n)$ обозначает число различных представлений целого числа n в виде

$$n = \varepsilon_1 n_{k_1} + \varepsilon_2 n_{k_2} \quad (\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1; n_{k_1}, n_{k_2} \in \{n_k\}).$$

О.Сас [2] доказал следующую теорему относительно тригонометрического ряда Фурье без любого условия для промежутка.

Теорема 1. Пусть $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$; $\omega^{(2)}(\delta, f) = \sup\limits_{0 \le h \le \delta} \left\{ \left(\int\limits_{-\pi}^{\pi} \left| f(x+h) - f(x-h) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$ — модуль гладкости. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{k}, f\right)}{\sqrt{k}} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k|) < \infty.$$

С другой стороны, Я.Р.Патадиа и В.М.Шах [3] доказали следующую теорему относительно абсолютной сходимости коэффициентов ряда Фурье, в которой $\{n_k\}$ удовлетворяет условию A.

Теорема 2. Пусть $E \subset [-\pi,\pi]$; $f \in L^2[-\pi,\pi]$; $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_{n_k} e^{in_k x}$; $(0<\beta\le 1)$; $\{n_k\}$ удовлетворяет условию A; $\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n_k}, f, E\right) = \sup_{0\le h\le \frac{1}{n_k}} \left\{\left(\int_E \left|f(x+h)-f(x-h)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n_k}, f, E\right)}{\sqrt{k}}\right)^{\beta} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_{n_k}\right|^{\beta}\right) < \infty.$$

Теорему 2 обобщил Н.Огата [4].

Теорема 3. Пусть $E \subset [-\pi,\pi]$, $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Функция $\varphi(u)$, определенная для $u \ge 0$, возрастающая и вогнутая. Последовательность $\{n_k\}(k \in N)$ натуральных чисел удовлетворяет условию A.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{\pi}{n_k}, f, E\right)}{\sqrt{k}}\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\phi\left(\left|c_{n_k}\right|\right)\right) < \infty.$$

Теорема 2 – частный случай теоремы 3 при $\varphi(u) = u^{\beta}\,(0<\beta\le 1)$.

Определение. Через $E_k(f)_p$ обозначим наилучшее приближение функции f из $L_p[0,2\pi]$ тригонометрического полинома порядка меньше или равно k, т.е.

$$E_k(f)_p = \inf_{\{c_r\}}\left\| f(x) - \sum_{r=-k}^{k} c_r e^{irx}\right\|_{L_p[0,2\pi]}.$$

Вспомогательные леммы

Лемма 1. Когда $k \ge 1, m > 1$ $(k, m \in N)$,

$$\frac{m}{2^{m-1}} \le \sum_{j=k^m}^{(k+1)^m-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{m}}} \le 2^{m-1} m.$$

Доказательство. Вследствие теоремы о среднем значении имеются c_1, c_2: $k < c_1, c_2 < k+1$ такие, что верны следующие два неравенства, при этом используется монотонность функции:

$$\sum_{j=k^m}^{(k+1)^m-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{m}}} \ge \frac{(k+1)^m - k^m}{\left((k+1)^m-1\right)^{1-\frac{1}{m}}} = \frac{m c_1^{\,m-1}}{(k+1)^{m-1}} \ge m\left(\frac{k}{k+1}\right)^{m-1} \ge \frac{m}{2^{m-1}},$$

а с другой стороны,

$$\sum_{j=k^m}^{(k+1)^m-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{m}}} \le \frac{(k+1)^m - k^m}{k^{m-1}} = \frac{mc_2^{\,m-1}}{k^{m-1}} \le m\left(\frac{k+1}{k}\right)^{m-1} \le 2^{m-1}m.$$

Доказательство леммы 1 закончено.

Лемма 2. Пусть функция $\varphi(u)$, определенная для $u \ge 0$, возрастающая и вогнутая, такая, что $\varphi(u) = 0$, а ψ — монотонно невозрастающая функция, тогда следующие два условия эквивалентны:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}} \phi\left(\frac{\psi\left(n_{k^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{k^{\frac{1}{\beta p}}}\right) < \infty; \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi(n_k)}{k^{\frac{1}{p}}}\right) < \infty. \tag{2}$$

Доказательство. Используем лемму 1 и монотонность функции φ.

С одной стороны,

$$\infty > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}} \varphi\left(\frac{\psi\left(n_{k^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{k^{\frac{1}{\beta p}}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k^{\beta}}^{(k+1)^{\beta}-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{\beta}}} \varphi\left(\frac{\psi\left(n_{j^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{j^{\frac{1}{\beta p}}}\right) \ge \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi\left(n_{\left[(k+1)^{\beta}-1\right]^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{\left[(k+1)^{\beta}-1\right]^{\frac{1}{\beta p}}}\right) \sum_{j=k^{\beta}}^{(k+1)^{\beta}-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{\beta}}} \ge$$

$$\ge \frac{\beta}{2^{\beta-1}} \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi(n_{k+1})}{(k+1)^{\frac{1}{p}}}\right) = \frac{\beta}{2^{\beta-1}} \sum_{k=2}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi(n_k)}{k^{\frac{1}{p}}}\right),$$

с другой —

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}} \varphi\left(\frac{\psi\left(n_{k^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{k^{\frac{1}{\beta p}}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k^{\beta}}^{(k+1)^{\beta}-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{\beta}}} \varphi\left(\frac{\psi\left(n_{j^{\frac{1}{\beta}}}\right)}{j^{\frac{1}{\beta p}}}\right) \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi(n_k)}{k^{\frac{1}{p}}}\right) \sum_{j=k^{\beta}}^{(k+1)^{\beta}-1} \frac{1}{j^{1-\frac{1}{\beta}}} \le 2^{\beta-1}\beta \sum_{k=1}^{\infty} \varphi\left(\frac{\psi(n_k)}{k^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Доказательство закончено.

Поэтому условия (1) и (2) эквивалентны.

Нам понадобятся леммы 3 и 4 из работы [3].

Лемма 3 (неравенство Дженсена относительно вогнутой функции). Пусть функция $\varphi(u)$, определенная для $u \ge 0$, увеличивающаяся и вогнутая. Для любой бесконечной последовательности неотрицательных чисел $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ и любой бесконечной последовательности положительных чисел $P_1, P_2, ..., P_k, ...$ мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k \varphi(x_k)}{\sum_{k=1}^{\infty} P_k} \le \varphi\left(\frac{\sum_{k=1}^{\infty} P_k x_k}{\sum_{k=1}^{\infty} P_k}\right),$$

где каждый ряд сходится.

Лемма 4. Если $\gamma > 1$, то $\sum\limits_{k=N}^{\infty}\frac{1}{k^{\gamma}} \le \frac{1}{N^{\gamma-1}}$.

Теорема А (Джексон). Если $f \in L^p$, $1 \le p \le \infty$, то

$$E_{\nu}(f)_p \le c\omega^{(p)}\left(f;\frac{\pi}{\nu}\right),$$

где $c = const$.

Основной целью работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема 4 (основная теорема). Пусть $1 < p \le 2$, $p^1 = \frac{p}{p-1}$, $f \sim \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{n_k} e^{in_k x}$, $f \in L^p[0,2\pi]$. Функция $\varphi(u)$, определенная для $u \ge 0$, возрастающая и вогнутая.

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{E_{n_k}(f)_p}{k^{\frac{1}{p^1}}}\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_k}\right|\right) < \infty.$$

Доказательство основной теоремы. Пусть $1 < p \le 2$. Воспользуемся леммой 3

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right) = \sum_{|j|=1}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right) = \sum_{|j|=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{|j|^{\beta}}\frac{\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right)}{|j|^{\beta}} \le \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right)}{|j|^{\beta}} \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{1}{|j|^{\beta}}\right)\phi\left(\frac{\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{\left|c_{n_j}\right|}{|j|^{\beta}}}{\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{1}{|j|^{\beta}}}\right).$$

Применив неравенство Гельдера к полученной оценке и заменив сумму $\sum\limits_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\frac{1}{j^{\beta}}$ на эквивалентное выражение $\sum\limits_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\frac{1}{j^{\beta}} \sim \left(k^{\frac{1}{\beta}}\right)^{1-\beta} = k^{\frac{1}{\beta}-1}$, получим следующее:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{1}{|j|^{\beta}}\right)\phi\left(k^{1-\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\left|c_{n_j}\right|^{p^1}\right)^{\frac{1}{p^1}}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\frac{1}{|j|^{\beta p}}\right)^{\frac{1}{p}}\right). \qquad (3)$$

Преобразуем сумму $\left(\sum\limits_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\left(\frac{1}{|j|^{\beta}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}}$ следующим образом:

$$\left(\sum_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\left(\frac{1}{|j|^{\beta}}\right)^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \sim \left(\left(k^{\frac{1}{\beta}}\right)^{-\beta p+1}\right)^{\frac{1}{p}} = k^{-1+\frac{1}{\beta p}}.$$

Подставив полученное выражение в неравенство (3), найдем следующую оценку:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}}\phi\left(k^{1-\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\left|c_{n_j}\right|^{p^1}\right)^{\frac{1}{p^1}}\cdot k^{-1+\frac{1}{\beta p}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}}\phi\left(k^{\frac{1}{\beta p}-\frac{1}{\beta}}\left(\sum_{|j|=\left[k^{\frac{1}{\beta}}\right]}^{\infty}\left|c_{n_j}\right|^{p^1}\right)^{\frac{1}{p^1}}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}}\varphi\left(\frac{\left(\sum_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\left|c_{n_j}\right|^{p^1}\right)^{\frac{1}{p^1}}}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\right). \tag{4}$$

Применяя к правой части (4) неравенство Хаусдорфа-Юнга и лемму 2

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}}\varphi\left(\frac{\left(\sum_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}\left|c_{n_j}\right|^{p^1}\right)^{\frac{1}{p^1}}}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\varphi\left(\frac{\left\|\sum_{j=k^{\frac{1}{\beta}}}^{\infty}c_{n_j}e^{in_jx}\right\|_{L_p[0,2\pi]}}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\varphi\left(\frac{E_{n_{k^{\frac{1}{p}}}}(f)_p}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\right),$$

получим:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_j}\right|\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{1-\frac{1}{\beta}}}\phi\left(\frac{E_{n_{k^{\frac{1}{p}}}}(f)_p}{k^{\frac{1}{\beta p^1}}}\right) \le \sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\frac{E_{n_k}(f)_p}{k^{\frac{1}{p^1}}}\right) < \infty .$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{\infty}\phi\left(\left|c_{n_k}\right|\right) < \infty ,$$

что и требовалось доказать.

Из данной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Пусть $f(x) \in L^2[-\pi,\pi]$. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{k}, f\right)}{\sqrt{k}} < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_{n_k}\right|\right) < \infty .$$

Доказательство. $E = [-\pi,\pi]$. Пусть $\varphi(x) = x$. При $p = 2$ из условия теоремы 4 следует:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{E_{n_k}(f)_2}{\sqrt{k}}\right) < \infty .$$

Применяя теорему А, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{E_{n_k}(f)_2}{\sqrt{k}}\right) < \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{k}, f\right)}{\sqrt{k}} < \infty .$$

Следовательно, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_{n_k}\right|\right) < \infty$.

Следствие 2. Пусть $f \in L^2[-\pi,\pi]$. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{1}{n_k}, f\right)}{\sqrt{k}}\right)^{\beta} < \infty \quad (0 < \beta \le 1),$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\left|c_{n_k}\right|^{\beta}\right) < \infty .$$

Доказательство. $E = [-\pi,\pi]$. Пусть $\varphi(x) = x^{\beta}$ $(0 < \beta \le 1)$. Доказывается аналогично.

Следствие 3. Пусть $f \in L^2[-\pi,\pi]$; функция $\varphi(u)$, определенная для $u \ge 0$, возрастающая и вогнутая. Последовательность $\{n_k\}(k \in N)$ натуральных чисел удовлетворяет условию A .

Если

$$\sum_{k=1}^{\infty}\varphi\left(\frac{\omega^{(2)}\left(\frac{\pi}{n_k}, f\right)}{\sqrt{k}}\right) < \infty,$$

то

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\phi\left(\left|c_{n_k}\right|\right)\right) < \infty .$$

Доказательство аналогично следствиям 1 и 2.

Таким образом, мы получили достаточное условие сходимости лакунарных рядов по тригонометрической системе в терминах наилучших приближений, из которого следует теорема О.Саса, а в случае $E = [-\pi,\pi]$ получаются теоремы Я.Р.Патадиа, В.М.Шаха и Н.Огата.

References

1. *Edwards R.* Numbers of Fure in modern presentation. — M.: World, 1985. — 401p.
2. *Szasz O.* Fourier series and mean moduli of continuity// Trans. American Math. Soc. — 1937. — P. 366—395.
3. *Patadia J.R., Shah V.M.* On the absolute convergence of lacunary Fourier series// J. Indian Math. Soc. — 1980. — P. 267–273.
4. *Ogata N.* On the absolute convergence of lacunary Fourier series// Math. Japanica 1999. — Vol. 49. — N. 2. — P. 241—245.