Список литературы

1. *Плисс В.А.* Нелокальные проблемы теории колебаний. — М.: Наука, 1964. — 367 с.
2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. — Киев: Вища шк., 1976. — 182 с.
3. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Мартынюк Д.И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. — Киев: Наук. думка, 1984. — 216 с.

ӘОЖ 517.12

Қ.Жетпісов[1], Б.С.Жұмабаев[1], А.М.Джузбаева[2]

[1]Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті;
[2]Қорқыт Ата атындағы Қызылорда мемлекеттік университеті

РЕТТІК ҚАТЫНАСТАР ЖӘНЕ РЕТТЕЛГЕН ЖИЫННЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

В данной статье изучаются свойства частично упорядоченных и линейно упорядоченных множеств. Пропедевтика изучения моделей, отношений изоморфизма и гомоморфизма моделей осуществляется применительно к частично (линейно) упорядоченным и квазиупорядоченным множествам. На примере изучения теоремы о переходе авторы воспроизвели в действии процесс диалектического восхождения от конкретного к абстрактному и вновь к обогащенному восприятию конкретного, но уже на более высоком уровне развития.

In this article properties of partially ordered sets and linearly ordered sets are studying. Propaedeutics of studying models, relations of isomorphism and homomorphism of models are realizing comfortably to partially (linearly) ordered sets and quasiordered sets. Authors reproduced in motion the process of the dialectical ascent from concrete to abstract and again to enriched perception of concrete on more high level of development by example studding of transition theorem.

Реттік құрылымдар мен оларды классификациялауды алғаш айқындаған Н.Бурбаки болатын [1]. Бұл көзқарас қазіргі уақытқа дейін әлі өзгерусіз қалды. Осыған байланысты модельдерді оқып-зерттеу (пропедевтикасы) бастамасы модельдердегі изоморфизм және гомоморфизм қатынастары бөліктік (сызықтық) реттелген және квазиреттелген жиындарға қатысты да қолданылымды. Бұл мақалада енгізілген реттік қатынаспен реттелген жиын әдістемелік ерекшеліктері тұрғысынан қарастырылады. Бөліктік реттелген жиынның, ішкі жиынының ең үлкен (ең кіші), максималды (минималды) элементтері және «тура жоғарғы (тура төменгі) қыры» ұғымдарының ерекшеліктерін көрсету үшін стандартты емес мысалдар келтіріледі.

Математикадағы бұл ұғымдардың универсалдығына (әмбебаптығына) қарамастан, студенттер бұл ұғымдар туралы қажетті деңгейде мағлұмат алмағандықтан, оларға формалды түрде қарап, олардың мағыналарын түсіне бермейді.

Бөліктік (сызықтық) реттелген жиындардағы «модельдердің изоморфизмі» мен «гомоморфизмі» ұғымдары анықталып, негізгі қасиеттері сипатталады және бөліктік реттелген жиынның көрінісі туралы теорема қарастарылады. Бұл теореманың әдістемелік құндылығы, ол нақты мысалдардың көмегімен абстрактілі ұғымдарды дұрыс қабылдауға (түсінуге) көмегін тигізеді.

Теореманың қолданбалық (практикалық) маңыздылығы, ол теоретика-жиындық көріністерді, мысалға, Эйлер-Венн диаграммасын, бөліктік реттік жиындармен жұмыс істегенде қолдануды қамтамасыз етеді. Бұл теореманың технологиялық ерекшелігінде де әдістемелік құндылық бар. Теореманың тұжырымы бойынша кез келген бөліктік реттелген жиынды кейбір жиынның барлық ішкі жиындарының Буль алгебрасының ішкі алгебрасы түрінде кескіндеуге болады.

Бұдан біз бөліктік реттелген жиынның белгілі бір (сәйкесінше) жиындар алгебрасы түрінде анықталуы үшін және оның құрылымдық қасиеттерін анықтаушы аксиомалар жұмыс істеуі үшін өзөзіне жеткіліктігін көреміз.

Студенттердің назарын теореманың дәлелдеуінің негізгі кезеңдеріне және орындалу ретіне аударған жөн. Себебі осы жоба бойынша әріректе Буль алгебрасының көріністері туралы теорема дәлелденеді және онда осы технологиялар қолданылады.

Туыстас объектілер жиындықтарының шамалық және реттік сипаттамаларымен байланысты көптеген жаратылыс-ғылыми ұғымдарды анықтауда квазиреттік қатынас негізгі рөл атқарады.

Абстракциялық сәйкестендіруді орындауда квазиреттелген жиынның құрылымдық қасиеттері одан бөліктік реттелген жиынға көшуді толығымен қамтамасыз етеді. Бұл туралы «көшу туралы теоремада» айтылады. Нақты квазиреттелген жиынға бұл теореманы қолдану модельдердің изоморфтық және гомоморфтық қасиеттерін оқып-зерттеудегі дайындық кезеңіндегі жұмысқа өте бай мүмкіндік ашады.

1. Сандық жиындардағы табиғи реттер

Эквиваленттік қатынастармен қатар реттік қатынастар математикада маңызды рөл атқарады.

Математиканың негізгі ұғымдарының бірі бөліктік қатынас болып табылады. Ол теоретикалық математика мен оның әр түрлі қосымшаларында кеңінен қолданылады. Сандық жиындардағы бөліктік реттік қатынастардың мысалы ретінде «$\le$» «$\ge$» «<» «>» — «кіші немесе тең», «үлкен немесе тең», «кіші», «үлкен» қатынастарын алуға болады. Мысалы, осы табиғи қатынастарды N натурал сандар жиынында беру арқылы оның бөліктерін анықтай аламыз. Олар осы $N^2 = N \times N$ — жарты кеңістігінің «диагоналдық элемент жиыны», $(x = y)$, ішкі жарты жазықтықтары ($x \le y, y \le x$). Осы қатыныстардың N натурал сандар жиынындағы қасиеттері мектеп курсындағы математикадан бізге таныс.

R нақты сандар жиынындағы «$\le$» қатынасының рефлексивтілігі, антисимметриялығы және транзитивтілігі белгілі. Сонымен қатар бұл жиынды кез келген x, y үшін $x < y$ немесе $y < x$ немесе $x = y$. «$\le$» қатынасына ие жиындардың ішінде бірқатар басқада ерекше қасиеттерге ие жиындар бар. Мысалға, натурал сандар жиынының кез келген өзіндік шексіз ішкі жиыны негізгі жиынның барлық қасиеттеріне ие, ал бірақ рационал сандар жиынына мұндай жағдай әр уақытта бола бермейді. Рационал сандар жиынындағы $\le$ қатынасы тығыз, яғни, кез келген x, y рационал сандары үшін $x < y$ болса, онда z рационал саны табылып, $x < z < y$ теңсіздігі орындалады.

Рационал сандар жиынындағы $\le$ қатынасы — натурал сандар жиынындағы $\le$ қатынасының табиғи жалғасы. Осыған қарамастан, $\le$ қатынасы натурал сандар жиынында тығыз емес.

Студенттердің назарын осы кезеңде жиындарда рационал, натурал анықталған $\le$ қатынасының табиғи екендігін, оны сырттан, белгілі бір шарттардың, қажеттіліктердің себебінен туындамағандығын түсіндіру қажет. Бұл қатынас осы жиындарда анықталған бірден бір қатынас емес. Мұндай табиғи қатынастар көп. Мысалға, натурал сандар жиынында реттік P қатынасын келесі ереже бойынша анықтайық: $mPn \Leftrightarrow$ (m — жұп, n — жұп және $m \le n$) немесе (m — тақ, n — тақ және $m \le n$) немесе (m — жұп, n — тақ).

Яғни жұп сандар P бойынша $\le$ қатынасымен реттелген, тақ сандар да P бойынша $\le$ қатынасымен реттелген, әрбір жұп сан әрбір тақ санның P бойынша алдында тұрады.

Барлық натурал сандар P реті бойынша келесі түрде орналасады:

$$0;\ 2;\ 4;\ 6;\ 8;\ \ldots;\ 2n;\ \ldots;\ 1;\ 3;\ 5;\ 6;\ \ldots;\ 2n+1;\ \ldots\ \ (n \in N). \tag{1}$$

Осыған ұқсас N жиынында басқа да реттік қатынастарды анықтауға болады. Бұл мысалдар сандық жиындарда әр түрлі қасиеттерге ие реттік қатынастардың бар екендігін көрсетеді.

2. Бөліктік реттелген жиындар

Әр түрлі жиындардағы (сандық табиғатты болуы міндетті емес) барлық мүмкін қатынастарды оқып-зерттеу мақсатында келесі анықтаманы енгізейік:

A жиынындағы P қатынасы *бөліктік реттік қатынас* (немесе бөліктік рет) (б.р.қ.) деп аталады, егер ол рефлексивті, антисимметриялы, транзитивті болса.

Мысалдар келтірейік:

а) айталық M — кез келген бос емес жиын және $P(M)$ оның ішкі жиындарының жиыны болсын. $\subseteq$ (қамтылу) қатынасы $P(M)$ жиынындағы бөліктік реттік қатынас болады;

б) айталық, $M = \{\langle \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n / \alpha_i \in \{0,1\}\rangle ; i = 1, 2, \ldots n\}$ ноль мен бірден құрылған ұзындығы n-ге тең барлық реттелген тізбектердің жиыны болсын. Кез келген $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle ; \langle \gamma_1, \ldots, \gamma_n \rangle \in M$ үшін

$\langle \beta_1,\ldots,\beta_n \rangle \; P \; \langle \gamma_1,\ldots,\gamma_n \rangle \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(\beta_i \le \gamma_i)$ ережесімен M жиынында анықталған бинарлық P қатынасы бөліктік реттік қатынас болады;

в) «x саны y санын бөледі». D қатынасы N натурал сандар жиынында

$$\Big((\forall x \in N)(\forall y \in N)\big(x D y \Leftrightarrow (x \ne 0) \,\&\, (\exists z \in N)(y = z \cdot x)\big)\Big) \tag{2}$$

ережесімен анықталған және ол бөліктік реттік қатынас;

г) N натурал сандар жиынында P бинарлық қатынасын келесі түрде анықтайық: $(\forall x \in N)(\forall y \in N)(xPy \Leftrightarrow x$ санының цифрларының қосындысы y санының цифрларының қосындысынан үлкен емес). Онда P қатынасы рефлексивті, транзитивті, бірақ антисимметриялы емес.

Шындығында, егер $a = 386$ және $b = 935$ болса, онда aPb және bPa (сандардың цифрларының қосындысы 17-ге тең), бірақ $a \ne b$. Бұл жағдайда P бөліктік қатынас болмайды. Бөліктік ретке қосымша талаптар қою арқылы жаңа қатынастар аламыз. Байламдылық қасиетіне ие бөліктік қатынас *сызықтық реттік қатынас* деп аталады.

Мысалға, N, Z, Q, R натурал, бүтін, рационал, нақты сандар жиынындағы $\le$ табиғи рет-сызықтық реттік қатынас болады.

M жиыны онда анықталған бөліктік (сызықтық) P қатынысымен бөліктік (сызықтық) реттелген жиын деп аталып, $\langle M; P \rangle$ арқылы белгіленеді.

Бөліктік реттелген $\langle M; P \rangle$ жиынының элементтері x және y *салыстырымдылы* деп аталады, егер xPy немесе yPx болса. Сонымен, P қатынысы бойынша сызықтық реттелген жиында осы жиынның кез келген элементтері салыстырылымды.

Бөліктік реттелген жиын модельдің қарапайым мысалы, яғни, алгебралық амалдар жиыны бос болатын алгебралық жүйе, сигнатурасында функционалдық таңба жоқ.

Сонымен біз бөліктік реттелген жиындарды оқып-зерттеу барысында біруақытта «алгебралық жүйе» және «модель» ұғымдарын пропедевтикалық оқып-зерттеуді жүзеге асырамыз.

Сандық жиындардағы табиғи реттілікке қатысты $x \le y$ болғанда x-ті y-тің *алдындағысы*, ал y-ті x-тің *ілесушісі* деп атайды.

Осы терминологияны сақтап, $\langle M; P \rangle$ бөліктік реттелген жиын болған жағдайда x-ті y-тің P *алдындағысы,* ал y-ті x-тің P *ілесушісі* деп атайтын боламыз.

Әр түрлі аттардың (атаулардың) сөздіктерін құруда лексикологиялық деп аталатын рет кеңінен қолданылады және оның көмегімен осы сөздіктегі сөздердің орналасуы іске асады.

Студенттерге жаттығу ретінде осы мысалдың формалданған түрін беріп шыққан (қатынастың) реттің қасиеттерін зерттеуді ұсынуға болады.

3. Ең үлкен және ең кіші, максималды және минималды элементтер

Енді бөліктік реттелген жиынды оқып-зерттеуді ең үлкен және ең кіші элементтер туралы индуктивті көріністерді формаль түрде беруге бағыттайық. Осы көріністердің баламасы ретінде нақты сандар жиынында «$\le$» табиғи ретімен анықталған

$$\langle \{x / x > a\}; \le \rangle; \langle \{x / x \ge b\}; \le \rangle; \langle \{x / b \le x < a\}; \le \rangle \tag{3}$$

сызықтық реттелген ішкі жиындарды алуға болады. Оқып-зерттеудің бағытталғандығы бөліктік реттелген жиынның «ең үлкен (ең кіші)», «максималды (минималды) элементтері», «бөліктік реттелген жиынның ішкі жиынның жоғарғы (төменгі)», «тура жоғарғы (тура төменгі) қырлары» ұғымдарымен қажет болған жағдайда білікті пайдалана білуге арналған.

Бұл ұғымдар барлық математикалық пәндерді практикалық оқып-үйренудегі қажеттілік болып табылады. Мысалы, математикалық талдауда «нақты сандар» ұғымы енгізіледі және Дедекинд қимасы әдісімен оқып-зерттеледі, «шек» ұғымы негізделеді және шексіз аз санағы құрылады. Осы ұғымдар жүйесінің жеткілікті деңгейде ұғындырылуы олардың шектелген бірлігінде индуктивті анықтамалар мен дәлелдеулер әдістемесін жақсы меңгеруде, сол сияқты оларды минималдық шартымен бөліктік реттелген жиындарға жалпылауға (нётрлік индукция) көмегін тигізеді.

Сонымен қатар жалпы алгебрада кейбір S қасиетін қанағаттандыратын (S қасиетіне ие) ішкі жүйелер жиынтығы теоретико-жиындық қамтылу «$\subseteq$» қатынасына қатысты, Цорн леммасының шарттарын қанағаттандыратын, қамтылу бойынша S қасиетті максималды ішкі жүйелер құрайды.

Осыған ұқсас технологиялар (әдістемелер) модельдер теориясында да, жалпы алгебралық жүйелер теориясында да қолданылады. Айталық $\langle M;P\rangle$ бөліктік реттік жиын болсын. $a\in M$ элементі:

а) $\langle M;P\rangle$ бөліктік реттелген жиынның *ең үлкен (ең кіші) элементі* деп аталады, егер

$$(\forall x\in M)(xRa)\big[(\forall x\in M)(aRx)\big] \text{ болса;} \tag{4}$$

б) $\langle M;P\rangle$ бөліктік реттелген жиынның максималды (минималды) элементі деп аталады, егер

$$(\forall x\in M)\big((aRx\Rightarrow(x=a))\big)\Big[(\forall x\in M)\big((xRa\Rightarrow(x=a))\big)\Big] \text{ болса.} \tag{5}$$

(4) шарт $\langle M;P\rangle$ бөліктік реттелген жиында ең үлкен (ең кіші) элементтің M жиынының барлық элементтерімен салыстырымды болатындығын және ең үлкен элементтің M жиынының кез келген элементінің ілесуші екендігін, ең кіші элементтің алдыңғысы екендігін білдіреді.

(5) шарт максималды a элементінің одан өзгеше ілесушісінің жоқ екендігін, ал минималды a элементінің одан өзгеше алдыңғысының жоқ екендігін білдіреді.

Басқаша айтқанда, максималды элемент өзімен салыстырымды кез келген элементтің ілесушісі, ал минималды элемент — алдыңғысы.

Негізделген ұғымдардың қарапайым қасиеттерін тұжырым түрінде берейік:

а) егер бөліктік реттелген жиында ең үлкен (ең кіші) элемент бар болса, онда ол бірмәнді анықталады;

б) бөліктік реттелген жиында ең үлкен (ең кіші) элемент максималды (минималды) элемент болады, кері тұжырым дұрыс емес;

в) сызықтық реттелген жиын үшін ең үлкен (ең кіші) және максималды (минималды) элементтер ұғымдары сәйкес келеді.

Егер $\langle M;P\rangle$ кез келген бөліктік реттелген жиын болса, онда ондағы ең үлкен және ең кіші элементтердің бар болуына (жоқ болуына) қатысты келесі мүмкіндіктер орынды.

$\langle M;P\rangle$ бөліктік реттелген жиында:

а) ең үлкен, ең кіші элементтері де жоқ;

б) ең үлкен элемент бар, бірақ ең кіші элемент жоқ;

в) ең үлкен элемент жоқ, бірақ ең кіші элемент бар;

г) ең үлкен және ең кіші элементтер бар.

Осы барлық мүмкіндіктердің орындалатындығын тексеру қиын емес. Мысал ретінде негізгі жиындары сәйкесінше интервал, жарты интервалдар, сегмент: $(a,b);(a,b];[a,b);[a,b]$ $(a\neq b,\ a;b\in R)$ болатын нақты сандар жиынын, ал P қатынасы ретінде осы жиындағы кәдімгі «$\le$» қатынасы анықталған бөліктік реттелген жиында алуға болады.

Әр түрлі санды максималды, минималды элементтері бар болатын (жоқ болатын) бөліктік реттелген жиындар әр қилы болуы мүмкін. Геометриялық сипаттағы көрнекіліктерді пайдаланып және дәстүрлі емес тұрғылармен, мүмкіндігінше, математиканың әр түрлі саласынан алынған «құрылыс материалдарын» іріктеп, олардан мысалдар құруға болады. Мысалға, егер M шексіз жиын болса, онда $\langle B(M);\subseteq\rangle$ бөліктік реттелген жиында Φ және M ішкі жиындары сәйкесінше ең кіші және ең үлкен элементтер болады. Егер $\langle B(M)\setminus\{\Phi;M\};\subseteq\rangle$ бөліктік реттелген жиынын қарастырсақ, онда оның ең үлкен және ең кіші элементтері болмайды. Мұндағы кез келген бір элементті ішкі жиын $\{a\}(a\in M)$ минималды, ал $M\setminus\{a\}(a\in M)$ түріндегі кез келген ішкі жиын максималды элемент болады.

Егер $B^{\omega}(M)$ арқылы M жиынының барлық ақырлы ішкі жиындарының жиынын белгілесек, онда бос ішкі жиын $\langle B^{\omega}(M);\subseteq\rangle$ бөліктік ішкі жиынның ең кіші элементі болады.

Әрбір бірэлементті ішкі жиын $\{a\}(a\in M)$ осы бөліктік реттелген $\langle B^{\omega}(M);\subseteq\rangle$ жиынының минималды элементі болады, бірақ бұл бөліктік реттелген жиынның ең үлкен және ең кіші элементтері де болмайды.

Бөліктік реттелген $\langle N;D\rangle$ жиынында, мұндағы D — осы N жиынындағы бөлінгіштік (бүтіндей) қатынасы, яғни $xDy\Leftrightarrow x\neq 0$ және x саны y санын (бүтіндей) бөледі, *1 саны* — ең кіші элемент, ал бірақ бұл жиынның ең үлкен элементі де, максималды элементі де жоқ.

Егер $N^{*} = N \setminus \{0,1\}$ болса, онда $\langle N^{*}, D \rangle$ бөліктік реттелген жиында минималды элементтер жиыны жай сандар жиынымен сәйкес келеді.

4. Жоғарғы және төменгі, тура жоғарғы және тура төменгі шекара

Айталық, $\langle M;P \rangle$ бөліктік реттелген жиын және $A \subseteq M$ болсын. $a \in M$ элементі $\langle M;P \rangle$ бөліктік реттелген жиындағы A ішкі жиынының *жоғарғы (төменгі) шекарасы* деп аталады, егер келесі шарттар орындалса:

$$(\forall x \in A)(xPa) \quad \left((\forall x \in A)(aPx)\right). \tag{6}$$

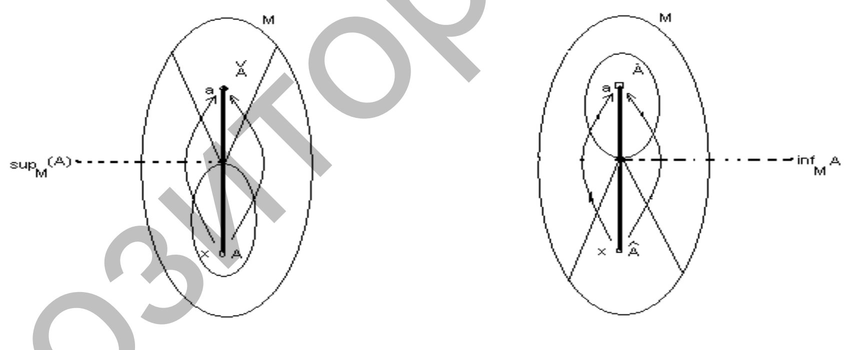
$A \subseteq M$ ішкі жиынының $\langle M;P \rangle$ бөліктік реттелген жиында бірнеше жоғарғы (төменгі) шекарасы болуы мүмкін.

Бөліктік реттелген $\langle M;P \rangle$ жиынындағы A ішкі жиынының барлық жоғарғы шекаралар жиынын $\overset{\vee}{A}$ арқылы, ал барлық төменгі шекаралар жиынын $\hat{A}$ арқылы белгілейміз.

$\overset{\vee}{A}\left(\hat{A}\right)$ бос жиын болмаған жағдайда M жиынындағы A ішкі жиынының жоғарыдан (төменнен) шектелгендегі туралы айтуға болады.

Бөліктік реттелген $\left\langle \hat{A}, P \right\rangle$ жиынының ең үлкен элементі $\langle M;P \rangle$ жиынындағы A ішкі *жиынының тура төмендегі шекарасы* деп аталады.

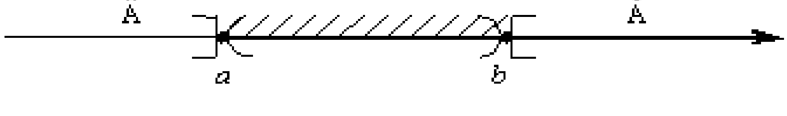
Бөліктік реттелген $\left\langle \overset{\vee}{A}, P \right\rangle$ жиынының ең кіші элементі $\langle M;P \rangle$ жиынындағы A ішкі *жиынының тура жоғарғы шекарасы* деп аталады. $\langle M;P \rangle$ жиынындағы A ішкі жиынының тура жоғарғы шекарасын $\sup_M A$ арқылы, ал тура төменгі шекарасын $\inf_M (A)$ арқылы белгілейміз (1-сур.).



1-сур.

Жаңадан енгізілген ұғымдар ертеректе қарастырылған мысалдардың терминінде анықталғандықтан, осы мысалдарды жаңа мазмұн мен мағынада толықтырады және осы жаңа ұғымдардың мағынасын ашып көрнекіліктердің көмегімен көрсету үшін осы бөліктік реттелген жиындардың мысалдары қолданылады.

Айталық, $a;b$ — нақты сандар және $a \neq b$ болсын. M ретінде R нақты сандар жиынын, ал A ішкі жиыны ретінде $(a;b)$ интервалындағы сандардың жиынын алайық. Онда A ішкі жиыны $\langle M;\subseteq \rangle$ жиынында жоғарыдан да, төменнен де шектелген және бұл жағдайда $\hat{A} = (-\infty;\, a]$ $\overset{\vee}{A} = [b;\, +\infty)$ (2-сур.),



2-сур.

тура жоғары да, тура төменгі де шекаралары жоқ.

5. Реттелген жиындардағы изоморфизм қатынасы

Бөліктік реттелген жиын жағдайында модельдердің изоморфизмінің жалпы анықтамасы келесі түрде анықталады:

Егер A жиынының B жиынына биективті бейнелеуі φ бар болып,

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B) \quad (a\,S\,b \Leftrightarrow \varphi(a)\,R\,\varphi(b)) \qquad (7)$$

шарты орындалса, онда бөліктік (сызықтық) реттелген $\mathscr{A} = \langle A; S \rangle$ және $\mathscr{B} = \langle B; R \rangle$ жиындарын *изоморфты* (таңбалық түрде $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$) деп атаймыз [2].

(7) шарттың кейбір жағдайларда «қатынасты сақтау» шарты деп атайды.

Бөліктік және сызықтық реттердің өзіндік ерекшеліктері, бұл анықтамадағы кейбір шарттарды бәсеңдетуге болатындығын ерекше айта кетуге болады.

Атап айтсақ:

1) бөліктік (сызықтық) реттелген жиын жағдайында ϕ бейнелеуінің биективті болуы талабын изоморфизмнің анықтамасында осы бейнелеудің сюръективті болуы талабына дейін босаңдатуға болады;

2) сызықтық реттелген жиын жағдайында изоморфизмнің анықтамасындағы (7) шартты

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B) \quad (a\,S\,b \Rightarrow \varphi(a)\,R\,\varphi(b)) \qquad (7^*)$$

шартына дейін бәсеңдетуге болады.

Енді осы айтылғандарды негіздейік.

1. Айталық, $\mathscr{A} = \langle A; S \rangle$ және $\mathscr{B} = \langle B; R \rangle$ бөліктік реттелген жиындар және φ бейнелеуі (7) шартты қанағаттандыратын A-ның B-ға сюръективті бейнелеуі болсын. Онда $\mathscr{A} \cong \mathscr{B}$ болатындығын дәлелдейік.

Дәлелдеу тек ғана φ бейнелеуінің биективтілігін талап етеді, яғни

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B) \quad (x \neq y \Rightarrow \varphi(x) \neq \varphi(y)). \qquad (8)$$

Кері жориық. Айталық, кейбір $x, y \in A$ үшін $x \neq y$, бірақ $\phi(x) = \phi(y)$ болса, x және y элементтері үшін екі жағдай орынды:

а) x және y салыстырымды;

б) x және y салыстырымсыз.

Осы жағдайлардың әрқайсысын жеке-жеке қарастырайық.

а) $x \neq y$ болғандықтан, онда келесі жағдайлардың тек біреуі ғана орынды: $x\,S\,y$ немесе $y\,S\,x$ (керісінше жағдайда, S қатынасының антисимметриялығынан $x = y$ болар еді). Мысалға, $x\,S\,y$ болсын. $\varphi(x) = \varphi(y)$ болғандықтан, онда R рефлексивтілігінен $\varphi(y)\,R\,\varphi(x)$.

Онда (7) шарттан алатынымыз $y\,S\,x$. Бірақ, бұл жоғарыда көрсетілгендей, $x = y$ теңдігіне әкеледі. Бұл қарама-қайшылық а) жағдайының орындалмайтындығын көрсетеді; б) жоғарыдағы талдауға ұқсас ой-пайымдауларды қолданып, б) жағдайының да орындалмайтындығын көрсетуге болады. x және y үшін басқа мүмкіндіктердің жоқтығынан қарама-қайшылыққа келеміз.

Сонымен, (8) шарт орынды, яғни φ бейнелеуі биективті.

2. Бұдан (7^*) шартындағы импликацияның қайтымдылығын дәлелдеу талап етіледі, яғни

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A) \quad (\varphi(x)\,R\,\varphi(y) \Rightarrow x\,S\,y) \qquad (9)$$

қатынасын дәлелдеу керек.

Кері жориық: айталық, $\varphi(x)\,R\,\varphi(y)$, біреу кейбір $x, y \in A$ үшін $\neg(x\,S\,y)$ болсын. S сызықтық рет болғандықтан, x және y S бойынша салыстырымды. Яғни $\neg(x\,S\,y)$ болғандықтан, $y\,S\,x$.

Бұдан (7^*) шартына сәйкес $\varphi(y)\,R\,\varphi(x)$ шығады, ал ол $\varphi(x)\,R\,\varphi(y)$ қатынасымен бірге $\varphi(x) = \varphi(y)$ теңдігін береді. φ биекция болғандықтан, $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow x = y$. S қатынасының рефлексивтігін ескерсек, $x\,S\,y$ және $\neg(x\,S\,y)$ шарттары қарама-қайшылықты береді.

Сонымен, (9) толық дәлелденді.

6. Квазиреттік қатынас және «көшу» туралы теорема

Бос емес жиындағы рефлексивті және транзитивті қатынас *квазиреттік қатынас* деп аталады.

M жиыны онда берілген кейбір квазиреттік P қатынасымен *квазиреттелген* $\mathcal{M}=\langle M;P\rangle$ *жиын* деп аталады.

Абстракция әдісін қолдануда квазиреттік қатынас туыстас объектілер жиынтығының шамалық және реттік сипаттамаларына байланысты көптеген табиғи-ғылымдық ұғымдарды анықтауда маңызды роль атқарады. Бұл әдістің негізінде (белгілі бір мағынада) квазиреттелген $\langle M;P\rangle$ жиынынан P^* бөліктік рет анықталған M жиынының кейбір фактор группасына табиғи (каноникалық) көшу жатыр. Квазиреттің қасиеттерін оқып-зерттеу мәселесі осы көшуді толық қамтамасыз етеді.

Келесі теорема бұл қатынастың негізін құрайды [3].

Айталық, M жиынында P квазиреттік қатынасы анықталсын. Онда:

а) $(\forall x\in M)(\forall y\in M)(x\approx_P y)\Leftrightarrow((xPy)\,\&\,(yPx))$ ережесімен M жиынындағы анықталған бинарлық $\approx_P$-қатынасы осы M жиынындағы эквиваленттік қатынас болады;

б) $\left(\forall[x]_{\approx_P}\in M/_{\approx_P}\right)\left(\forall[y]_{\approx_P}\in M/_{\approx_P}\right)\left(([x]_{\approx_P}P^*[y]_{\approx_P})\Leftrightarrow\left(\left(\exists x'\in[x]_{\approx_P}\right)\left(\exists y'\in[y]_{\approx_P}\right)(x'Py')\right)\right)$

ережесімен $M/_{\approx_P}$ фактор-жиынында анықталған бинарлық P^* қатынасы бөліктік реттік қатынас болады. Осы теоремаға байланысты (әріректе *«көшу туралы теорема»* деп аталатын болады) келесі ескертулерді атап өтейік:

1. M жиынындағы P квазиреттік қатынастан $M/_{\approx_P}$ фактор-жиынындағы бөліктік реттік P^* қатынасына көшу $\langle M;P\rangle$ моделінен $\langle M/_{\approx_P};P^*\rangle$ фактор-модельге көшу болып табылады. $M/_{\approx_P}$ фактор-жиынында анықталған P^* қатынасы алгебралық жүйелердің жалпы теориясындағы фактор-модельді құрудың жалпы әдістемесіне сәйкес келеді [4].

2. Қарастырылып отырған жағдайда, яғни P квазиреттік қатынас болғанда,

$$\left(\exists x'\in[x]_{\approx_P}\right)\left(\exists y'\in[y]_{\approx_P}\right)(x'Py') \tag{10}$$

шарты

$$\left(\forall x'\in[x]_{\approx_P}\right)\left(\forall y'\in[y]_{\approx_P}\right)(x'Py') \tag{11}$$

шартымен тең мәнді.

3. P^* қатынасы байламды болады сол уақытта тек қана сол уақытта, егер P байламды болса (сонымен, P квазиретті байламды болғанда P^* бөліктік рет болып қана қоймай, ол және сызықтық рет болады).

Әдебиеттер тізімі

1. *Бурбаки Н.* Архитектура математики. Очерки по истории развития математики. — М.: ИЛ, 1965. — 292 с.
2. *Гончаров С.С., Ершов Ю.Л., Самохвалов К.Ф.* Введение в логику и методологию науки. — М.: Интерпракс, 1994. — 255 с.
3. *Гончаров С.С., Дроботун Б.Н., Никитин А.А.* Методические аспекты изучения алгебраических систем в высшем учебном заведении: Моногр. — Новосибирск: НГУ, 2007. — 251 с.
4. *Мальцев А.И.* Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970. — 392 с.