УДК 517.927.5

Н.С.Иманбаев

*Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, Шымкент,*
*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы*
*(E-mail: imanbaevnur@mail.ru)*

# Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа

В статье рассмотрена задача, где исследованы базисные свойства системы корневых векторов для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа. В рассматриваемой спектральной задаче определен характеристический детерминант.

*Ключевые слова:* оператор Штурма-Лиувилля, собственные значения, антипериодический тип, возмущенная краевая задача.

В пространстве $L_2(0.1)$ рассмотрим оператор $L_0$, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$L_0(u) \equiv -u^{''}(x) + q(x)u(x), q(x) \in C[0,1], 0 < x < 1 \tag{1}$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1,2. \tag{2}$$

В случае когда краевые условия (2) являются усиленно регулярными, из результатов В.П.Михайлова [1] и Г.М.Кесельмана [2] следует базисность Рисса в $L_2(0,1)$ систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае когда краевые условия не усиленно регулярные, вопрос о базисности систем СиПФ остается еще открытым.

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов краевых условий (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Через $A(ij)$ будем обозначать матрицу, составленную из $i$-го и $j$-го столбцов матрицы $A, A_{ij} = = detA(ij)$. Пусть краевые условия (2) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Согласно [3; 73] при выполнении условий

$$A_{12} = 0, A_{14} + A_{23} = 0;\ A_{14} + A_{23} = m(A_{13} + A_{24}) \tag{3}$$

краевые условия (2) будут эквивалентны регулярным, но не усиленно регулярным краевым условиям.

В [4] было предложено, что все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия разделить на четыре типа:

I. $A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0.$

II. $A_{14} = A_{23}, A_{34} \neq 0.$

III. $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0.$

IV. $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} \neq 0.$

Например, краевые условия с периодическими или антипериодическими условиями образуют тип I и определяются в следующем виде:

$$A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0,$$

т.е. $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0, a_{23} = -a_{24}$. Эти условия будут эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A, где возможны два варианта:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

периодические или

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

антипериодические.

Однако те же краевые условия с «младшими коэффициентами» образуют тип II. Краевые условия, определенные в виде $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$, образуют тип III. Эти условия всегда эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом А.С.Макиным выделен один тип не усиленно регулярных краевых условий, при которых система СиПФ спектральной задачи [4]

$$L_0(u) \equiv -u'(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), q(x) \in C[0,1], 0 < x < 1 \tag{4}$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1, 2$$

образует базис Рисса при любых потенциалах $q(x)$.

В случае $q(x) \equiv 0$ задача о базисности системы СиПФ задачи с общими регулярными краевыми условиями полностью решена в [5]. Базисные свойства системы корневых векторов оператора двукратного дифференцирования при интегральном возмущении условий периодического типа были изучены в работах [6, 7].

Случай, образующий тип I, в частности, антипериодического типа с интегральным возмущением будет предметом наших исследований в настоящей работе.

Оператор $L_0$ Штурма-Лиувилля при $q(x) \equiv 0$ с краевыми условиями типа I является самосопряженной, а система ее собственных функций – обычной тригонометрической системой, образующей ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$ . В [8] изучены вопросы базисности систем СиПФ периодической задачи для оператора Штурма-Лиувилля при $q(x) \equiv 0$. В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [6-8] спектральная задача при $q(x) \equiv 0$, с интегральным возмущением одного из краевых условий (2) типа I

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1; \tag{5}$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0; \tag{6}$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, p(x) \in L_1(0,1). \tag{7}$$

Из работы [9] следует, что система СиПФ задачи (5)–(7) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является построение характеристического определителя задачи (5)–(7).

Здесь воспользуемся методикой нашей работы [10] построения характеристического определителя задачи с интегральным возмущением краевого условия. Построение сопряженной задачи к периодической задаче рассмотрено в работе [11, 12], а к задаче Самарского-Ионкина — в [13, 14].

Следуя процедуре работы [12], получим возмущения самосопряженной задачи, а именно спектральную задачу для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$\begin{gathered} L_1^*(v) \equiv -v''(x) + p(x)v'(1) = \overline{\lambda} v(x); \\ V_1 \equiv v(0) + v(1) = 0, V_2(v) \equiv v'(0) + v'(1) = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Задача (8) является несамосопряженным возмущением самосопряженной антипериодической задачи. В отличие от работы [8], здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения.

Вопросы базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов изучена в работе И.С. Ломова [15]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А.Ильина [16] на случай нагруженных дифференциальных операторов. Вопросы базисности функционально-дифференциальных уравнений были исследованы другим методом в работе [17].

Представляя общее решение уравнения (5) по формуле при $\lambda \neq 0$

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его краевым условиям (6), (7), получаем линейную систему относительно коэффициентов $C_k$

$$\begin{cases} C_1(1+\cos\sqrt{\lambda}) + C_2\sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_1[-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx] + \\ +C_2[\sqrt{\lambda}(1+\cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx] = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Определитель линейной системы (9) будет характеристическим определителем задачи (5)–(7):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1+\cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}(1+\cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}. \end{pmatrix}. \tag{10}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи (5)–(7). Так как $\lambda \neq 0$, обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda})$. Число $\lambda_0^0 = 0$ не является собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5)–(7), т.е. является регулярной точкой, и принадлежит резольвентному множеству невозмущенного оператора Штурма-Лиувилля $L_0$. Число $\lambda_k^0 = (2(k-1)\pi)^2$ является двукратным собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5) – (7), а $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\cos(2(k-1)\pi)x, u_{k1}^0 = \sqrt{2}\sin(2(k-1)\pi)x$ собственными функциями.

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2(k-1)\pi)x + b_k\sin(2(k-1)\pi)x]. \tag{11}$$

Используя (11), вычислим входящие в (10) интегралы и найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. После стандартного преобразования определитель $\Delta_1(\lambda)$ приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda}) - 2\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi^2)}, \tag{12}$$

где $\Delta_0(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda})$ — характеристический определитель невозмущенной антипериодической задачи. Таким образом, доказана

*Теорема 1.* Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными краевыми условиями (5)–(7) представим в виде (12), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель невозмущенной спектральной антипериодической задачи; $b_k$ — коэффициенты разложения (11) функции $p(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция в виде ряда $\Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \dfrac{(2k-1)\pi}{\lambda-((2k-1)\pi)^2}$ из (12) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $2\sin\sqrt{\lambda}$ и $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (12), является целой аналитической функцией переменного $\lambda$.

*Замечание 1.* Если рассмотреть возмущенную антипериодическую спектральную задачу (5), (7), (6), т.е. краевые условия (6)–(7) поменяем местами (7)–(6), тогда соответствующий характеристический определитель будет

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) = -\sqrt{\lambda}2(1+\cos\sqrt{\lambda}) + (1+\cos\sqrt{\lambda})\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx+ \\ +\sin\sqrt{\lambda}\int_0^1 \overline{p(x)}cos\sqrt{\lambda}xdx. \end{aligned} \tag{13}$$

Отличие (13) от (12) будет только в знаках.

В заключение отметим, что автор выражает благодарность члену-корреспонденту НАН РК, д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за обсуждение результатов.

*Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетной программы «Фундаментальные и прикладные научные исследования» Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 0825/ГФ4).*

Список литературы

1 *Михайлов В.П.* О базисах Рисса в L2 (0,1) // ДАН. — 1962. — Т.144. — №5. — С. 981–984.

2 *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Сер. Математика. — 1964. — № 2. — С. 82-93.

3 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 352 с.

4 *Макин А.С.* О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. — 2006. — Т. 406. — №1. — С. 21–24.

5 *Lang P., Locker J.* Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by –D2 // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1990. — Vol. 146. — No. 1. — P.148–191.

6 *Sadybekov M.A., Imanbaev N.S.* On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48 — № 6. — P. 896–900.

7 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On instability of basis property of the root vectors system of the double differentiation operator with an integral perturbation of periodic type conditions // AIP Conference Proceedings. —- 2015. —- Vol. 1676 — № 020083. AIP Publ. — [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930509.

8 *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 4. — С. 560-562.

9 *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

10 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014): AIP Conference Proceedings. — 2014. – Vol. 1611. — P. 261–265.

11 *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Докл. НАН РК. — 2010. — № 2. — С. 11–13.

12 I*manbaev N.S., Sadybekov M.A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4. — No. 3. — P. 53–62.

13 *Imanbaev N.S.* On the stability and instability of the basis properties of root functions of the Schrodinger equation with nonlokal perturbations of boundary condition // Bull. of Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2013. — No. 4 (72). — P.25–30.

14 *Imanbaev N.S.* On stability of basis property of root vectors system of the with Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of conditions in Nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems // Differential Equations. — Vol. 2015. — P. 6. — [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481.

15 *Ломов И.С.* Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–94.

16 *Ильин В.А.* О связи между видами краевых условий и свойствами базисности равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 9. — С. 1516–1529.

17 *Гомилько А.М., Радзиевский Г.В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 3. — С. 385–395.

Н.С.Иманбаев

## Интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының спектралдық есебінің сипаттамалық анықтауышы

Мақалада интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының түбірлік векторлар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеуге арналған есеп қарастырылған. Ол спектралдық есептің сипаттамалық анықтауышы ретінде белгіленген.