Список использованной литературы

1. R. Khalil,M. A. Horani, A. Yousef and M. Sababheh, A new definition of fractional derivative, *J. Comput. Appl. Math.* **264**, 65–70 (2014).
2. Ciano T.; Ferrara M.; Guerrini L. Qualitative analysis of a model of renewable resources and population with distributed delays. Mathematics 2022, 10(8), 1247; https://doi.org/10.3390/math10081247
3. Carleman T. La the´orie des e´quations inte´grales singulie´res et ses applications. Annales de l'institut Henri Poincare´ 1932, 1, 401–430.
4. Przeworska-Rolewicz D. Equations with Transformed Argument, An Algebraic Approach, 1st ed.; Elsevier Scientific: Amsterdam, The Netherlands, 1973; ISBN 0-444-41078-3
5. Karapetiants N.; Samko, S. Equations with Involutive Operators, 1st ed.; World Birkha¨user: Boston, MA, USA, 2001; ISBN 978-1-4612-0183-0.
6. Cabada A.; Tojo F.A.F. Differential Equations with Involutions, 1st ed.; Atlantis Press: Paris, France, 2015; ISBN 978-94-6239-120-8.
7. Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем дифференциальных уравнений //Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29. № 1. С. 50-66.
8. Dzhumabaev D. "Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations". *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 41:4 (2018), 1439-1462

О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ИОННО-ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЗАМАГНИЧЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Утебаев Д. [1], Нуруллаев Ж.А. [2]

[1] *Каракалпакский государственный университет им. Бердаха, Нукус, Узбекистан*

[2] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

E-mail: dutebaev_56@mail.ru; njusipbay@mail.ru

Как известно, решение сложных прикладных задач требует к созданию более точных численных алгоритмов или совершенствованию существующих. Она проявляется особенно при исследовании сложных нестационарных уравнений соболевского типа. Такие уравнения появляются при решении задач геофизики, океанологии, физики атмосферы, физики полупроводников, физики магнитоупорядоченных структур, связанные с распространением волн в средах с сильной дисперсией и многие другие [1]–[3]. Например, уравнение ионно-звуковых волн в замагниченной плазме [3]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\omega_{B_i}^2\right)\left(\Delta_3 u - r_D^{-2}u\right)+\omega_{p_i}^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Delta_3 u+\omega_{p_i}^2\omega_{B_i}^2\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}=f(x,t), \qquad (1)$$

$$(x,t)\in Q_T=\Omega\cup\partial\Omega,\ \Omega=\left\{x\,\middle|\,x=(x_1,x_2,x_3),\ 0<x_\alpha<l,\ \alpha=\overline{1,3}\right\},$$

относится к таким уравнениям. Начальные и краевые условия имеют вид:

$$\left.\frac{\partial^\nu}{\partial t^\nu}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,\nu},\quad \nu=\overline{0,3},\ \ x\in\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega,\ \ u(x,t)\big|_{\partial\Omega}=0,\ t\in(0,T]. \qquad (2)$$

Аппроксимируя пространственные переменные в (1) методом конечных разностей или методом конечных элементов получаем абстрактную задачу Коши для уравнения четвертого порядка:

$$D\frac{d^4u_h(t)}{dt^4}+B\frac{d^2u_h(t)}{dt^2}+Au_h(t)=f_h(t),\quad \frac{d^k u_h}{dt^k}(0)=u_{1,k,h},\ k=\overline{0,3}, \qquad (3)$$

где D, B и A линейные постоянные, не зависящие от t, операторы из $H\to H$, $D^*=D>0$, $B^*=B\ge 0$, $A^*=A>0$; $\forall\, t\ge 0,\ u=u(t),\ f=f(t)\in H$ - гильбертово пространство. Далее для задачи (3) на основе метода конечных элементов построена многопараметрическая разностная схема

$$D_\eta \dot{y}_t-\eta\tau^2 A y^{(0.5)}-D\ddot{y}^{(0.5)}=\varphi_1,$$

$$D_\gamma y_t-D_\gamma \dot{y}^{(0.5)}+\eta\tau^2 D\ddot{y}_t=\varphi_2, \qquad (4)$$

$$D_\alpha \dot{y}_t - D_\beta \ddot{y}^{(0.5)} - \eta\tau^2 A y^{(0.5)} = \varphi_3,$$

где $D_m = D - m\tau^2 B$, $m = \alpha, \beta, \gamma, \eta$, $\varphi_i \approx f$, $i = 1,2,3$. Нетрудно проверить, что схема имеет четвертого порядка погрешности аппроксимации, т.е. $\psi_1 = O(\tau^4)$, $\psi_2 = O(\tau^4)$, $\psi_3 = O(\tau^4)$, если выполнены условия

$$\alpha - \beta = 1/12, \; \eta = 1/12, \tag{5}$$

а γ - произвольная константа.

Начальные и краевые условия тоже имеют четвертый порядок аппроксимации. Методом энергетических неравенств доказана устойчивость построенной схемы (4). Для получения оценки точности используется специальная методика получения априорных оценок, так как классический подход к исследованию сходимости разностных схем, основанной на формуле Тейлора, предъявляет высокие требования к гладкости искомого решения. Поэтому, в последнее время получен ряд результатов по оценке скорости сходимости разностных схем для уравнений математической физики на основе леммы Брэмбла-Гильберта [4], [5].

Доказана следующая основная теорема.

Теорема. Пусть $D^* = D > 0,\ B^* = B \ge 0,\ A^* = A > 0$. Кроме того, пусть выполнены условия аппроксимации (5) и устойчивости $D - \mu\tau^2 A \ge \varepsilon D,\ \forall \varepsilon \in (0,1),\ \mu = \max\{\alpha, \beta, \gamma, \eta\}$. Тогда для решения схемы (4), аппроксимирующей решение задачи (1), (2) такого, что $u(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in C\{[0,T];\ W_2^{k+1}(\Omega)\},\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in C\{[0,T];\ W_2^2(\Omega)\}$, верна оценка точности:

$$\|\dot{u}(x,t) - \dot{u}_h(x,t)\|_1 + \|u(x,t) - u_h(x,t)\|_1 + \int_0^t \|\ddot{u}(x,t') - \ddot{u}_h(x,t')\|_1 dt' + \int_0^t \|\dot{u}(x,t') - \dot{u}_h(x,t')\|_1 dt' \le$$

$$\le M\left\{ h^k \left(\sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \|\dot{u}(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) + \tau^3 \sqrt{\int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right\},\ \forall t \in [0,T],$$

$$M = M(r_D, \omega) > 0.$$

Таким образом, в работе на основе метода конечных элементов построены и исследованы параметрические разностные схемы высокого порядка точности (4) для системы уравнений (3). Высокий порядок точности схемы достигается за счет специальной дискретизации временной и пространственных переменных. Кроме того, наличие параметров в схеме позволяют произвести регуляризацию схем с целью оптимизации алгоритма реализации и точности схемы. Получены, соответствующие априорные оценки и на их основе доказаны теоремы о скорости сходимости и точности построенных алгоритмов при слабых предположениях о гладкости решений исходной дифференциальной задачи. Предложен алгоритм реализации этих схем. Эти схемы имеют определенные преимущества перед другими схемами – схемы двухслойные, высокого порядка точности, кроме самого решения, одновременно находится и её производная (скорость) с той же точностью, используя некоторое интерполяционное представление при необходимости можно получить решение в любой момент времени. Кроме того, для достижения определенной точности позволяет выбрать большие шаги по времени и т. д.

На основе этих преимуществ можно исследовать и другие краевые задачи, в том числе, нелокальные краевые задачи. Кроме того эти результаты можно перенести к нагруженным уравнениям с локальными и нелокальными краевыми условиями.

Список использованной литературы

1. Свешников А.Г., Альшин А.Б., Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 736 с.
2. Габов С.А. Новые задачи математической теории волн. – М.: Наука, 1998. – 448 с.

3. Габов С.А., Свешников А.Г. Линейные задачи теории нестационарных внутренних волн. – М.: Наука, 1990. – 344 С
4. Самарский А.А, Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Наука, 1978. – 296 С.
5. Q Quarteroni A., Valli A. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. –Berlin: Springer–Verlag, 1994. – 544 P.

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ С МАКСИМУМАМИ

Файзиев А.К.
Ташкентский государственный университет имени И.А.Каримов, Ташкент, Узбекистан
E-mail: fayziyev.a@inbox.ru

Исследуется нелокальная краевая задача для системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка с импульсными эффектами и максимумами. Краевая задача задается интегральным условием. Используется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающего отображения. Доказаны существование и единственность решения краевой задачи. Показана непрерывная зависимость решений от правой части граничного условия.

На отрезке $[0,T]$ рассмотрим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений первого порядка

$$x'(t) = f\left(t, x(t), \int_0^T \Theta\left(t, s, \max\left\{x(\tau) \mid \tau \in \left[\lambda_1 s; \lambda_2 s\right]\right\}\right) ds\right), \ t \neq t_i, \ i = 1, 2, ..., p \qquad (1)$$

с нелокальным граничным условием

$$Ax(0) + \int_0^T K(t,s)\, x(s)\, ds = B(t) \qquad (2)$$

и нелинейный импульсными воздействиями

$$x\left(t_i^+\right) - x\left(t_i^-\right) = I_i\left(x\left(t_i\right)\right), \qquad i = 1, 2, ..., p, \qquad (3)$$

где $0 = t_0 < t_1 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $A \in R^{n \times n}$ заданные матрицы, $K(t,s)$ дано $n \times n-$ размерная матричная функция и $\det Q(t) \neq 0$, $Q(t) = A + \int_0^T K(t,s) ds$, $f : [0,T] \times R^n \times R^n \to R^n$, $\Theta : [0,T]^2 \times R^n \to R^n$, $I_i : R^n \to R^n$ заданные функции; $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, $x\left(t_i^+\right) = \lim_{h \to 0^+}\left(x_i + h\right)$, $x\left(t_i^-\right) = \lim_{h \to 0^-}\left(t_i - h\right)$ правосторонние и левосторонние пределы функции $x(t)$ в точке $t = t_i$ соответственно.

Через $C\left(\left[0,T\right] : R^n\right)$ будем обозначать пространство Банаха, которое состоит из непрерывных вектор-функций $x(t)$,определенных на отрезке $\left[0,T\right]$, со значениями в R^n и с нормой

$$\| x \| = \sqrt{\sum_{j=1}^n \max_{0 \le t \le T} \left| x_j(t) \right|}.$$

Через $PC\left(\left[0,T\right], R^n\right)$ обозначим линейное пространство