

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: Modth1705@mail.ru)

Теоретико-модельные свойства йонсоновских фрагментов

В статье рассмотрены теоретико-модельные вопросы, связанные с различными постановками задач для йонсоновских теорий. Установлена связь между свойствами йонсоновского фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории, центрального пополнения фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории и соответствующего фрагмента.

Ключевые слова: йонсоновская теория, йонсоновское множество, фрагмент йонсоновского множества, решётка экзистенциальных формул йонсоновской теории.

Данная работа связана с понятием фрагмента йонсоновского множества. Понятие йонсоновского множества было дано автором данной статьи в [1] и, кроме того, была определена некоторая программа изучения данного понятия в [2–4]. Также для этого понятия изучены теоретико-модельные вопросы, связанные с различными постановками задач, рассмотренных ранее в [5–7], для йонсоновских теорий. Основные сведения и ссылки, касающиеся постановок задач, связанных с понятиями йонсоновских теорий, можно найти в [8].

Хорошо известно, что в случае неполных йонсоновских теорий мы стремимся работать с совершенным случаем, так как при изучении свойств первого порядка самой теории мы применяем так называемый семантический метод, суть которого заключается в переносе элементарных свойств центра йонсоновской теории на саму эту теорию. Это неплохо работает при всех типах исследований, которые не связаны с такими «тонкими» исследованиями, как исследования, связанные с понятиями размерности модели. Но так как для таких исследований разработаны методы только для полных теорий, то в данной статье мы рассмотрим аналоги результатов для йонсоновских теорий на языке йонсоновских множеств. Дадим необходимые определения, связанные с понятием йонсоновских теорий и йонсоновских множеств.

Теория T называется йонсоновской, если:

- 1) имеет бесконечные модели;
- 2) индуктивна;
- 3) обладает свойством совместного вложения (*JEP*);
- 4) обладает свойством амальгамы (*AP*).

Изучение структурных вопросов теории и, соответственно, ее моделей является актуальной задачей теории моделей. При изучении свойств модели необходимо знать свойства ее элементов. Поэтому мы должны пойти на некоторые ограничения на свойства как моделей, так и их подмножеств, так как в общем случае такая задача для неполных теорий представляется совсем неподъемной. Как известно, в общем случае аксиомы йонсоновских теорий удовлетворяют практически все основные типы алгебраических объектов, но они, к сожалению, не полны в логическом смысле, а техника доказательств и используемые методы и понятия из теории моделей, как правило, даны для полных теорий и, соответственно, не работают в случае йонсоновских теорий. Поэтому развитие аппарата исследований и получение на этой базе новых теоретико-модельных результатов о структуре моделей в нашем случае играют важную роль для разработки общей теории моделей.

Итак, у нас два вида изучаемых объектов: теория и ее класс моделей. Как правило, в случае йонсоновских теорий мы рассматриваем класс всех экзистенциально замкнутых моделей некоторой совершенной, полной для специального вида предложений йонсоновской теории. И, наконец, мы будем работать не просто с подмножествами моделей, а только с йонсоновскими множествами, которые на самом деле являются подмножествами семантической модели рассматриваемой йонсоновской теории. Далее у специальных замыканий этих подмножеств будет рассмотрена некоторая индуктивная теория. Фактически на некотором замыкании будет рассмотрена йонсоновская теория.

Будем считать, что все $\forall\exists$ -следствия произвольной теории создают йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих $\forall\exists$ -следствий есть йонсоновская теория.

В противном случае мы всегда можем рассмотреть $\forall\exists$ -следствия, истинные в указанных выше замыканиях йонсоновского множества.

Полученная в этом случае йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом, соответственно, йонсоновского множества. В обоих случаях мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследований йонсоновских теорий. Рассмотрим определения:

Пусть L является счетным языком первого порядка.

Пусть T — йонсоновская теория, полная для экзистенциальных предложений в языке L , и ее семантическая модель есть C .

Мы говорим, что множество X Σ -определимо, если оно определимо некоторой экзистенциальной формулой.

а) Множество X называется йонсоновским в теории T , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ -определимое подмножество C ;

– $dcl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C .

б) Множество X называется алгебраически йонсоновским в теории T , если оно удовлетворяет следующим свойствам:

– X есть Σ -определимое подмножество C ;

– $acl(X)$ есть носитель некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели C .

Определение 1. Пусть X — йонсоновское множество и M — экзистенциально-замкнутая модель, где $dcl(X) = M$. Рассмотрим $Th_{\forall\exists}(M) = T_M$.

Назовем T_M йонсоновским фрагментом йонсоновского множества X .

Если первоначально йонсоновское множество X являлось подмножеством семантической модели некоторой йонсоновской теории T , то это не вызовет двух разночтений в связи с незанятостью символа T_M .

Далее мы предполагаем, что будем работать с некоторой йонсоновской теорией T , полной для экзистенциальных предложений, и ее семантической моделью C .

Рассмотрим некоторое йонсоновское множество X , являющееся подмножеством семантической модели C .

В рамках данных нововведенных определений рассмотрим теоретико-модельные свойства формульных решеток таких множеств и их связь с первоначальной теорией, а также новые методы изучения указанных выше теорий.

Рассмотрим йонсоновские теории и фрагменты йонсоновских подмножеств их семантических моделей. А также установим связь между свойствами йонсоновского фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории, центрального пополнения фрагмента йонсоновского множества йонсоновской теории и свойствами решетки классов эквивалентности экзистенциальных формул относительно этой теории и соответствующего фрагмента. Для этого мы будем использовать результаты из [7] и [9]. В [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и её центра. С другой стороны,

Теорема 1. [7] Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– T совершенна;

– T имеет модельный компаньон.

Ранее [10] была установлена связь между полнотой и модельной полнотой йонсоновской теории.

Теорема 2. Пусть T — совершенная йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

– T полна;

– T модельно полна.

В [7] была установлена связь между совершенностью йонсоновской теории и свойствами решетки $E_n(T)$. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть T — полная для \exists -предложений йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

– T совершенна;

– T^* модельно полна;

– $E_n(T)$ — булева алгебра,

где полнота теории для \exists -предложений означает, что любые две модели этой теории относительно экзистенциальных предложений не отличаются друг от друга. В связи с указанными выше результатами относительно введенных понятий получены данные, связывающие понятия из [9] с йонсоновскими теориями.

Далее, так как йонсоновская теория фиксирована, мы будем иметь дело только с йонсоновским фрагментом йонсоновского множества X этой теории T и, поскольку не будем использовать саму теорию, для удобства будем применять символ T .

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия элиминации кванторов центрального пополнения йонсоновской теории T и положительной модельной полноты центрального пополнения йонсоновской теории T .

Теорема 4. Пусть T — полная для \exists -предложений йонсоновская теория, T^* — центр теории T . Тогда:

- T^* допускает элиминацию кванторов тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение;
- T^* положительно модельно полна тогда и только тогда, когда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение.

Доказательство. 1) Пусть T^* допускает элиминацию кванторов. Тогда T^* подмодельно полна и в силу определения модельно полна, а $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое дополнение. В силу элиминации кванторов T^* , так как T^* — пополнение теории T , относительно теории T каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет некоторое бескванторное дополнение.

Обратно, пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй, T^* модельно полна, а тогда, в свою очередь, мы имеем, что любая формула относительно теории T^* эквивалентна некоторой экзистенциальной формуле, т.е. класс этой формулы принадлежит $E_n(T^*)$. В силу \exists -полноты теории T $E_n(T) = E_n(T^*)$. Следовательно, в силу того, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное дополнение и $E_n(T)$ является булевой алгеброй, любая формула в $E_n(T^*)$ бескванторна. Таким образом, теория T^* допускает элиминацию кванторов.

2) Пусть теория T^* положительно модельно полна. Тогда в силу определения теория T^* модельно полна и для каждой экзистенциальной формулы φ существует положительная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \mid -\varphi \leftrightarrow \psi$. Тогда $E_n(T)$ является булевой алгеброй, т.е. каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет экзистенциальное дополнение. Так как для каждой экзистенциальной формулы φ существует положительная экзистенциальная формула ψ такая, что $T^* \mid -\varphi \leftrightarrow \psi$, получаем, что каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение. Тем самым необходимое условие пункта 2 доказано.

Докажем достаточность пункта 2. Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет положительное экзистенциальное дополнение. Тогда теория T положительно модельно полна и, следовательно, по определению модельно полна. Тогда мы имеем, что теория T полна, и так как теория T^* является центральным пополнением теории T , мы получаем, что $T = T^*$. Таким образом, T^* положительно модельно полна.

Тем самым доказательство теоремы завершено.

В следующей теореме в терминах решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$ найдены необходимые и достаточные условия совершенности йонсоновской теории T .

Теорема 5. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

- 1) T совершенна;
- 2) $E_n(T)$ слабо дополняема;
- 3) $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть йонсоновская теория T совершенна, тогда она имеет модельный компаньон T^M . Из [8] известно, что $T^M = T^0$, где $T^0 = Th_{\forall\exists}(E_T)$ — оболочка Кайзера йонсоновской теории. Так как в силу определения модельного компаньона T^M модельно полна, мы имеем, что каждая формула рассматриваемого языка устойчива относительно подмоделей в $Mod T^M$. Следовательно, каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно подмоделей в

$ModT^M$, в то же время каждая экзистенциальная формула этого языка устойчива относительно расширений моделей в $ModT^M$ и по определению эта формула инвариантна в $ModT^M$. Отсюда следует, что каждая экзистенциальная формула слабо дополняема. Таким образом, $E_n(T)$ слабо дополняема. Докажем из 2) в 1). Если $E_n(T)$ слабо дополняема, то теория T имеет модельный компаньон. Тогда T совершенна. Тем самым, 1) эквивалентно; 2) докажем из 1) в 3). Заметим, что модельный компаньон йонсоновской теории является её модельным пополнением. Тогда из совершенности теории T следует, что $E_n(T)$ — алгебра Стоуна.

Докажем из 3) в 1). Если $E_n(T)$ — алгебра Стоуна, теория T имеет модельный компаньон, и, следовательно, по теореме теория T совершенна.

Таким образом, доказательство теоремы завершено.

В следующей теореме в терминах решетки формул найдены необходимые и достаточные условия йонсоновости центра йонсоновской теории.

Теорема 6. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

– T^* — йонсоновская теория;

– каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение.

Для доказательства необходимости нам понадобится следующее утверждение:

Факт (*) [8]. Если модельный компаньон T^M определен, то известен и модельный компаньон $(T_{\forall})^M$ и $T^M = (T_{\forall})^M$.

Доказательство. Докажем из 1) в 2). Пусть T^* — йонсоновская теория, тогда из [7] следует, что теория T совершенна. Тогда теория T имеет модельный компаньон, равный теории T^* , который является модельным пополнением теории T . В силу взаимной модельной совместности теории T и теории T_{\forall} — всех универсальных следствий теории T и факта (*) модельное пополнение теории T является модельным пополнением теории T_{\forall} . Отсюда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое бескванторное дополнение.

Докажем из 2) в 1). Пусть каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет бескванторное слабое дополнение. Тогда каждый $\varphi^T \in E_n(T)$ имеет слабое дополнение, т.е. $E_n(T)$ слабо дополняема. Тогда теория T совершенна. Тогда из [7] следует, что теория T^* является йонсоновской теорией.

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Все неопределяемые понятия в данной статье можно извлечь из [7].

Список литературы

- 1 Ешкеев А.Р. Йонсоновские множества и их некоторые теоретико-модельные свойства // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 53–62.
- 2 Ешкеев А.Р. On Jonsson sets and some their properties: Logic Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic, July, 9–24, 2014. — P. 108.
- 3 Ешкеев А.Р. Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: International Congress of Mathematicians August, 13–21, 2014, Seoul, Korea. — P. 8.
- 4 Ешкеев А.Р. The similarity of Jonsson sets: V Congress of the Turkic World Mathematicians Kyrgyzstan, Issyk-Kul (5–7 June), 2014. — P. 217.
- 5 Ешкеев А.Р. Категоричные позитивные йонсоновские теории // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2006. — № 4 (44). — С. 10–16.
- 6 Ешкеев А.Р. Счетная категоричность Δ -PM-теорий // Вестн. Казах. нац. ун-та. Сер. Математика, механика, информатика. — Спец. вып. — 2008. — № 3. — С. 64–69.
- 7 Ешкеев А.Р. Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.
- 8 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж. Барвайса. — Ч. 1. Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — 126 с.
- 9 Volker Weispfenning. The model-theoretic significance of complemented existential formulas // Journal of Symbolic Logic. — Vol. 46. — № 4. — Dec. 1981. — P. 843–849.
- 10 Yeshkeyev A.R. The Properties of Positive Jonsson's Theories and Their Models // International Journal of Mathematics and Computation. — 2014. — Vol. 22. — № 1. — P. 161–171.

А.Р.Ешкеев

Йонсондық фрагменттердің модельді теоретикалық қасиеттері

Мақалада йонсондық жиынның фрагмент ұғымымен және йонсондық теориялар үшін зерттелген әр түрлі есептің қойылымымен байланысты модельді теоретикалық мәселелер қарастырылған. Йонсондық жиын, йонсондық теория, йонсондық фрагмент қасиеттерінің йонсондық теориядағы йонсондық жиынның фрагменттің орталық толықтыруы және осы теорияға қатысты экзистенциалды формулалардың эквивалентті кластар торының қасиеттерімен сәйкес фрагменттің арасындағы байланыс орнатылған.

A.R. Yeshkeyev

The model theoretical properties of jonsson fragments

This work is related to the notion of a fragment of Jonsson set. For this concept considered model-theoretic questions related to different formulation of the problem, previously considered to Jonsson theories. The relation between the properties of the Jonsson fragment of Jonsson sets of Jonsson theory, the central replenishment of Jonsson fragment of Jonsson sets of Jonsson theory and properties of the lattice of equivalence classes of existential formulas regarding this theory and the corresponding fragment.

References

- 1 Yeshkeyev A.R. *Bulletin of KSU*, Series of mathematics, 2014, 2 (74), p. 53–62.
- 2 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson sets and some their properties: Logic Colloquium, Logic, Algebra and Truth Degrees. Vienna Summer of Logic*, July, 9–24, 2014, p. 108.
- 3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson sets and some of their model-theoretic properties: International Congress of Mathematicians August*, 13–21, 2014, Seoul, Korea, p. 8.
- 4 Yeshkeyev A.R. *The similarity of Jonsson sets: V Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, Issyk-Kul*, 5–7 June, 2014, p. 217.
- 5 Yeshkeyev A.R. *Bull. of the University, Ser. of Mathematics*, 2006, 4 (44), p. 10–16.
- 6 Yeshkeyev A.R. *Bull. of the KNU, Ser. of Mathematics, Mechanics*, Inform teak, 3, Special Issue, 2008, p. 64–69.
- 7 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, 250 p.
- 8 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts* / Ed. J. Barwise, ch. 1. Teoriya models: Per. from English, Moscow: Nauka; Home Editorial physical and mathematical literature, 1982, 126 p.
- 9 Volker Weispfenning. *Journal of Symbolic Logic*, 46, 4, 1981, p. 843–849.
- 10 Yeshkeyev A.R. *International Journal of Mathematics and Computation*, 2014, 22, 1, p. 161–171.