

ROUGH APPROXIMATE SUBGROUPS
Frank Olaf Wagner, Arturo Rodriguez Fanlo
Camille Jordan Institute, Lyon, France

Abstract: Let k be an integer. A subset A of a group G is a k -approximate subgroup if there is a finite set E of size at most k such that $A^2 \subseteq EA$. They were first studied by Freiman (1973) in the abelian setting; following work of Hrushovski (2011), finite approximate subgroups were classified by Breuillard, Green and Tao (2012). The first step of the proof is Hrushovski's Lie Model Theorem: Up to commensurability, a pseudo-finite (or definably measurable) approximate group has a quotient which is a locally compact Lie group. The original proof uses a *Stabilizer Theorem*, assuming the existence of an S1-ideal of negligible sets; an alternative version due to Sanders, Massicot and myself uses more of the measure but has better definability properties.

In his thesis under the supervision of Hrushovski, Arturo Rodriguez Fanlo (2022) generalizes the Lie Model Theorem to *rough approximate subgroups*, where $A^2 \subseteq EAT$ for some A -invariant type-definable subgroup T (for instance an infinitesimal neighbourhood of the identity in a metric group). While Arturo again passes through a near-group theorem, we have recently been able to adapt the alternative approach using outer measures.

ON MODEL THEORY BEYOND FIRST ORDER

Boris Zilber
Oxford University, Oxford, United Kingdom

In the last several decades there has been a gradual shift from first order model theory to its non-elementary versions. This is driven by discoveries both of new model-theoretic notions and constructions and of new applications in number theory and algebraic geometry. I will discuss one of such directions: categoricity and stability of abstract elementary classes and their connection to analytic aspects of algebraic/arithmetic geometry.

**ОБ АЛГЕБРАХ БИНАРНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ СЛАБО ЦИКЛИЧЕСКИ
МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ С ТРИВИАЛЬНЫМ ОПРЕДЕЛИМЫМ ЗАМЫКАНИЕМ**

Кулпешов Б.Ш.
Казахстанско-Британский технический университет, Алматы, Казахстан
E-mail: b.kulpeshov@kbtu.kz

Данный доклад касается понятия *слабой циклической минимальности*, первоначально изученного в [1]. Пусть $A \subseteq M$, где M — циклически упорядоченная структура. Множество A называется *выпуклым*, если для любых $a, b \in A$ выполняется следующее свойство: для любого $c \in M$ с условием $K(a, c, b)$ имеет место $c \in A$ или для любого $c \in M$ с условием $K(b, c, a)$ имеет место $c \in A$. *Слабо циклически минимальная структура* есть циклически упорядоченная структура $M = \langle M, K, \dots \rangle$ такая, что любое определимое подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M .

Пусть \mathcal{M} — счетно категоричная слабо циклически минимальная структура, $G := \text{Aut}(\mathcal{M})$. Следуя стандартной теоретико-групповой терминологии, группа G называется k -транзитивной, если для любых попарно различных $a_1, a_2, \dots, a_k \in M$ и попарно различных $b_1, b_2, \dots, b_k \in M$ существует $g \in G$, для которого $g(a_1) = b_1, g(a_2) = b_2, \dots, g(a_k) = b_k$. *Конгруэнцией* на \mathcal{M} называется любое G -инвариантное отношение эквивалентности на \mathcal{M} . Группа G называется *примитивной*, если G является 1-транзитивной и не существует нетривиальных собственных конгруэнций на \mathcal{M} .

Пусть \mathcal{M}, \mathcal{N} — циклически упорядоченные структуры. Назовем *2-редуктом* структуры \mathcal{M} циклически упорядоченную структуру с тем же носителем, что и \mathcal{M} , и состоящую из предикатов для каждого \emptyset -определимого отношения на \mathcal{M} арности не более 2, а также из тернарного предиката K для циклического порядка, но не имеющую других предикатов, арность которых больше двух. Будем говорить, что структура \mathcal{M} *изоморфна \mathcal{N} с точностью до бинарности*, если 2-редукт структуры \mathcal{M} изоморфен 2-редукту структуры \mathcal{N} .

Сечением $C(x)$ в циклически упорядоченной структуре \mathcal{M} является максимальное непротиворечивое множество формул вида $K(a, x, b)$, где $a, b \in M$. Сечение является *алгебраическим*, если существует $c \in M$, реализующий его. В противном случае, такое сечение называется *неалгебраическим*. Пусть $C(x)$ — неалгебраическое сечение. Если существует некоторый $a \in M$ такой, что либо для всех $b \in M$ формула $K(a, x, b) \in C(x)$, либо для всех $b \in M$ формула $K(b, x, a) \in C(x)$, то $C(x)$ называется *рациональным*. В противном случае, такое сечение называется *иррациональным*.

Определимым сечением в M называется сечение $C(x)$ такое, что $a, b \in M$ такие, что $K(a, x, b) \in C(x)$ и множество $\{c \in M \mid K(a, c, b) \text{ и } K(a, x, c) \in C(x)\}$ является определимым. *Определимое пополнение \bar{M}* структуры \mathcal{M} состоит из M вместе со всеми определимыми сечениями в M , являющимися иррациональными (по существу \bar{M} состоит из концевых точек определимых подмножеств структуры \mathcal{M}).

Пусть $F(x, y)$ — \emptyset -определимая формула, такая что $F(M, b)$ выпуклое бесконечное кобесконечное множество для каждого $b \in M$. Пусть $F^l(y)$ — формула, говорящая что y — левая концевая точка множества $F(M, y)$. Мы говорим что $F(x, y)$ — *выпуклая вправо*, если

$$M \models \forall y \forall x [F(x, y) \rightarrow F^l(y) \wedge \forall z (K(y, z, x) \rightarrow F(z, y))].$$

Если $F_1(x, y), F_2(x, y)$ — произвольные выпуклые вправо формулы, то мы говорим что $F_2(x, y)$ *больше чем $F_1(x, y)$* , если существует $a \in M$ с условием $F_1(M, a) \subset F_2(M, a)$. Если M является 1-транзитивной и последнее условие имеет место для некоторого a , то оно имеет место для всех a . Это дает нам полное упорядочение конечного множества всех выпуклых вправо формул $F(x, y)$. Если для некоторого $a \in M$ выполняется $\text{dcl}(a) = \{a\}$, тогда для любой выпуклой вправо формулы $F(x, y)$ и любого $a \in M$ множество $F(M, a)$ не имеет правой концевой точки в M . Мы будем писать $f(y) := \text{rend } F(M, y)$, подразумевая что $f(y)$ — правая концевая точка множества $F(M, y)$, которая лежит в общем случае в определимом пополнении \bar{M} структуры \mathcal{M} . Тогда f является функцией, отображающей M в \bar{M} .

Пусть f — унарная функция в \bar{M} с $\text{Dom}(f) = I \subseteq M$, где I — открытое выпуклое множество. Мы говорим, что f является *монотонной вправо (влево) на I* , если она сохраняет (обращает) отношение K_0 , т.е. для любых $a, b, c \in I$ таких, что $K_0(a, b, c)$, мы имеем $K_0(f(a), f(b), f(c))$ ($K_0(f(c), f(b), f(a))$).

Будем говорить, что слабо циклически минимальная теория имеет *ранг выпуклости 1*, если не существует определимого отношения эквивалентности с бесконечным числом бесконечных выпуклых классов.

В работе [2] были описаны счетно категоричные 1-транзитивные непримитивные слабо циклически минимальные структуры ранга выпуклости 1 с тривиальным определимым замыканием с точностью до бинарности.

Алгебры бинарных формул являются инструментом для описания связей между элементами множеств реализаций типов на бинарном уровне относительно суперпозиции бинарных определимых множеств. Мы будем рассматривать алгебры бинарных изолирующих формул, первоначально изученные в работах [3, 4], где под бинарной изолирующей формулой понимается формула вида $\varphi(x, y)$ такая, что для некоторого параметра a формула $\varphi(a, y)$ изолирует некоторый полный тип из $S(\{a\})$. Понятия и обозначения, относящиеся к этим алгебрам, можно также найти в работах [3, 4]. В последние

годы алгебры бинарных формул изучаются интенсивно и получили свое продолжение в работах [5]–[8].

В настоящем докладе мы обсуждаем алгебры бинарных изолирующих формул для счетно категоричных слабо циклически минимальных теорий ранга выпуклости 1 с 1-транзитивной непримитивной группой автоморфизмов и тривиальным определенным замыканием.

Теорема. Пусть M — счетно категоричная 1-транзитивная непримитивная слабо циклически минимальная структура ранга выпуклости 1 с $dcl(a) = \{a\}$ для некоторого $a \in M$. Тогда алгебра \mathfrak{F}_M бинарных изолирующих формул коммутативна \Leftrightarrow для любой выпуклой вправо формулы $R(x, y)$, не являющейся эквивалентность-генерирующей, функция $r(y) := \text{rend}R(M, y)$ является монотонной вправо на M .

Данное исследование поддержано КН МОН РК (Грант AP08855544) и Российским научным фондом (Проект 22-21-00044).

Список использованной литературы

1. B.Sh. Kulpeshov, H.D. Macpherson, Minimality conditions on circularly ordered structures // *Mathematical Logic Quarterly*, 51:4 (2005), 377–399.
2. B.Sh. Kulpeshov, On \aleph_0 -categorical weakly circularly minimal structures // *Mathematical Logic Quarterly*, 52:6 (2006), 555–574.
3. С.В. Судоплатов, Классификация счетных моделей полных теорий. — Новосибирск : НГТУ, 2018.
4. I.V. Shulepov, S.V. Sudoplatov, Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 11 (2014), 380–407.
5. Д.Ю. Емельянов, Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Алгебры распределений бинарных формул в счетно категоричных слабо ω -минимальных структурах // *Алгебра и Логика*, 56:1 (2017), 20–54.
6. Д.Ю. Емельянов, Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для вполне ω -минимальных теорий // *Алгебра и Логика*, 57:6 (2018), 662–683.
7. Д.Ю. Емельянов, Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Алгебры бинарных формул для композиций теорий // *Алгебра и Логика*, 59:4 (2020), 432–457.
8. А.Б. Алтаева, Б.Ш. Кулпешов, С.В. Судоплатов, Алгебры распределений бинарных изолирующих формул для почти ω -категоричных слабо ω -минимальных теорий // *Алгебра и Логика*, 60:4 (2021), 369–399.