

В.Н.Украинец

Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова
(E-mail: vitnikukr@mail.ru)

Задача о действии подвижной периодической нагрузки на двухслойную оболочку в упругом полупространстве

Получено точное аналитическое решение задачи о действии подвижной периодической нагрузки на двухслойную оболочку в упругом полупространстве. Для описания толстого наружного слоя оболочки автором использованы динамические уравнения теории упругости, колебания тонкого внутреннего слоя описываются классическими уравнениями теории тонких оболочек в подвижной системе координат. Решение основано на методе неполного разделения переменных. При численной реализации задачи рекомендовано применять метод последовательных отражений (приближений).

Ключевые слова: периодическая нагрузка, двухслойная оболочка, полупространство, действие, теория упругости, метод последовательных отражений.

Рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую двухслойную оболочку, ось которой совпадает с осью z декартовой (x, y, z) или цилиндрической (r, θ, z) неподвижной системы координат, расположенную в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве $x \leq h$ (массиве) параллельно свободной от нагрузок его горизонтальной границе $x = h$. Внутренний слой оболочки — тонкая упругая оболочка толщиной h_0 и радиусом срединной поверхности R_2 , наружный — толстая упругая оболочка с радиусом наружной поверхности R_1 (рис. 1). Условимся внутренний слой двухслойной оболочки называть несущим, а наружный — ограждающим слоем. В силу малости h_0 принимаем, что несущий слой контактирует с ограждающим слоем вдоль своей срединной поверхности. Контакт между слоями оболочки, а также контакт между ограждающим слоем и массивом будем полагать либо жёстким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

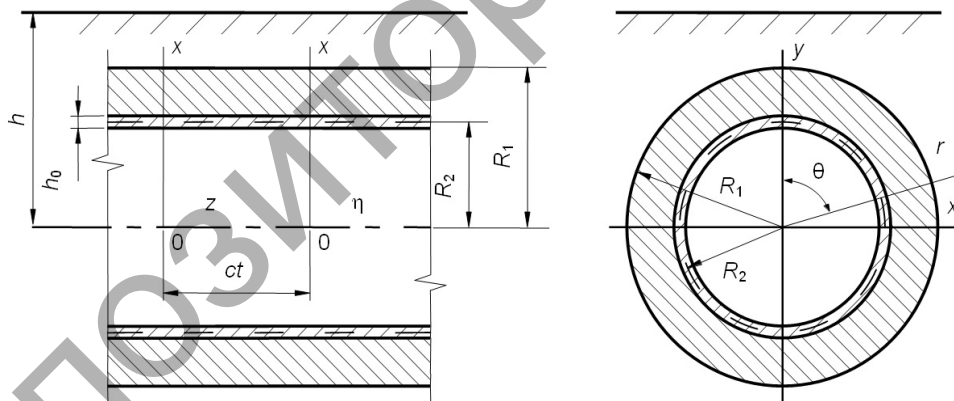


Рисунок 1. Двухслойная оболочка в упругом полупространстве

Пусть на внутреннюю поверхность оболочки действует периодическая по её оси нагрузка интенсивностью P , движущаяся с постоянной дозвуковой скоростью c (т.е. меньшей, чем скорости распространения волн сдвига в ограждающем слое и массиве) в направлении оси z . Физико-механические свойства массива и ограждающего слоя характеризуются следующими постоянными: $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_2, \mu_2, \rho_2$, где ν_k — коэффициент Пуассона; μ_k — модуль сдвига; ρ_k — плотность ($k = 1, 2$). Здесь и в дальнейшем индекс $k = 1$ относится к массиву, а $k = 2$ — к ограждающему слою.

Для описания движения массива и ограждающего слоя используем динамические уравнения теории упругости в подвижной системе координат $\eta = z - ct$ [1]

$$\left(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}\right) \text{grad div } u_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 u_k = \partial^2 u_k / \partial \eta^2, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ — числа Маха; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ — скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в массиве и ограждающем слое; $\lambda_k = 2\mu_k\nu_k/(1-2\nu_k)$; \mathbf{u}_k — векторы смещений точек массива и ограждающего слоя; ∇^2 — оператор Лапласа.

Для описания движения несущего слоя воспользуемся классическими уравнениями теории тонких оболочек, которые в подвижной системе координат имеют подобный [2] вид:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0}\right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_{\eta 2}), \\ \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0}\right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} &= \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\theta - q_{\theta 2}), \\ \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} &= -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_{r 2}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $R = R_2$; $u_{0\eta}$, $u_{0\theta}$, u_{0r} — перемещения точек срединной поверхности несущего слоя; ν_0 , μ_0 , ρ_0 — коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность его материала; $P_j(\theta, \eta)$ — составляющие интенсивности нагрузки $P(\theta, \eta)$; $q_{j2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}$ — составляющие реакции ограждающего слоя; σ_{rj2} — компоненты тензоров напряжений в ограждающем слое, $j = \eta, \theta, r$.

Выразим векторы u_k через потенциалы Ламе [1]:

$$\mathbf{u}_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \quad (3)$$

которые, как следует из (1) и (3), удовлетворяют уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \partial^2 \varphi_{jk} / \partial \eta^2, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где \mathbf{e}_η — орт оси η , $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (3) и закон Гука, получаем выражения для компонент векторов \mathbf{u}_k и тензоров напряжений в массиве ($k = 1$) и ограждающем слое ($k = 2$) в подвижной цилиндрической системе координат:

$$u_{rk} = \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial r}, \quad u_{\eta k} = \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \eta} + m_{sk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2}, \quad u_{\theta k} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta}; \quad (5)$$

$$\sigma_{\eta k} = (2\mu_k + \lambda_k M_{pk}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k m_{sk}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^3},$$

$$\sigma_{\theta k} = \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + \frac{2\mu_k}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta^2 \partial \eta} + \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{r k} = \lambda_k M_{pk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta^2} + 2\mu_k \left(\frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial \theta} + \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r^2 \partial \eta} \right),$$

$$\sigma_{r \eta k} = \mu_k \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \eta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \theta \partial \eta} + (1 + m_{sk}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \eta^2 \partial r} \right), \quad (6)$$

$$\sigma_{\eta \theta k} = \mu_k \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r \partial \eta} + \frac{(1 + m_{sk}^2)}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial \theta \partial \eta^2} \right),$$

$$\sigma_{r \theta k} = 2\mu_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial r^2} - \frac{m_{sk}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{2k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \varphi_{3k}}{\partial r \partial \eta \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi_{3k}}{\partial \eta \partial \theta} \right),$$

где $m_{sk}^2 = 1 - M_{sk}^2$.

В подвижных декартовых координатах выражения для компонент напряжённо-деформированного состояния (НДС) массива имеют вид

$$u_{x1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial x \partial \eta}, \quad u_{\eta 1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial \eta} + m_{s1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial \eta^2}, \quad u_{y1} = \frac{\partial \varphi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \varphi_{21}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta}; \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_{\eta\eta} &= (2\mu_1 + \lambda_1 M_{p1}^2) \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 m_{s1}^2 \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^3}, \\
 \sigma_{yy1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{xx1} &= \lambda_1 M_{p1}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta^2} + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x^2 \partial \eta} \right), \\
 \sigma_{x\eta} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial \eta \partial x} + \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial y \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial \eta^2 \partial x} \right), \\
 \sigma_{y\eta} &= \mu_1 \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial y \partial \eta} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x \partial \eta} + (1 + m_{s1}^2) \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial y \partial \eta^2} \right), \\
 \sigma_{xy1} &= 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_{11}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial x^2} - \frac{m_{s1}^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi_{21}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^3 \varphi_{31}}{\partial x \partial y \partial \eta} \right).
 \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, для определения компонент НДС массива и ограждающего слоя необходимо решить уравнения (4), используя граничные условия.

Рассмотрим случай, когда подвижная нагрузка представима в виде синусоидальной нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты:

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n e^{in\theta}, \tag{9}$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

Потенциалы φ_{jk} будем искать в аналогичном виде:

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) e^{i\xi\eta}. \tag{10}$$

Подставляя (10) в (4), получим видоизменённые уравнения Гельмгольца:

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \tag{11}$$

где ∇_2^2 — двумерный оператор Лапласа, $m_{jk}^2 = 1 - M_{jk}^2$, $m_{1k} \equiv m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} \equiv m_{sk}$.

Выражения (5)–(8), с учётом (10), переписутся в виде

$$\begin{aligned}
 u_{rk} &= \left(\frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} i \right) e^{i\xi\eta}, \\
 u_{\theta k} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} - \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} i \right) e^{i\xi\eta}, \\
 u_{\eta k} &= \left(\xi \Phi_{1k} i - \xi^2 m_s^2 \Phi_{3k} \right) e^{i\xi\eta};
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\sigma_{\eta\eta k} = -\mu \left[\left(2 + \frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \right) \xi^2 \Phi_{1k} + 2m_s^2 \xi^3 \Phi_{3k} i \right] e^{i\xi\eta},$$

$$\sigma_{\theta\theta k} = \mu \left[-\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{1k} + \frac{2}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial r \partial \theta} + \frac{\xi}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial \theta^2} i + \xi \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} i \right) \right] e^{i\xi\eta},$$

$$\sigma_{rr k} = \mu \left[-\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{1k} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial r^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta},$$

$$\sigma_{r\eta k} = \mu \left[2\xi \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial r} i + \frac{\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial \theta} i - \xi^2 (1 + m_s^2) \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial r} \right] e^{i\xi\eta}, \tag{13}$$

$$\sigma_{\eta\theta k} = \mu \left[\frac{2\xi}{r} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} i - \xi \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} i - \frac{\xi^2 (1 + m_s^2)}{r} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} \right] e^{i\xi\eta},$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta k} &= \mu \left(\frac{2}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{1k}}{\partial \theta \partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \Phi_{1k}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{2k}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_{2k}}{\partial r} + \frac{2\xi}{r} \frac{\partial^2 \Phi_{3k}}{\partial r \partial \theta} i - \frac{2\xi}{r^2} \frac{\partial \Phi_{3k}}{\partial \theta} i \right) e^{i\xi\eta}; \\ u_{x1} &= \left(\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} + \xi \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x} i \right) e^{i\xi\eta}, \quad u_{y1} = \left(\frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} + \xi \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial y} i \right) e^{i\xi\eta}, \quad u_{\eta 1} = (\xi \Phi_{11} i - \xi^2 m_s^2 \Phi_{31}) e^{i\xi\eta}; \quad (14) \\ \sigma_{\eta\eta 1} &= -\mu \left[\left(2 + \frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \right) \xi^2 \Phi_{11} + 2m_s^2 \xi^3 \Phi_{31} i \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{yy1} &= \mu \left[-\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{11} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x \partial y} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial y^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{xx1} &= \mu \left[-\frac{\lambda}{\mu} M_p^2 \xi^2 \Phi_{11} + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x \partial y} + \xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x^2} i \right) \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{x\eta 1} &= \mu \left[2\xi \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial x} i + \xi \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial y} i - \xi^2 (1 + m_s^2) \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x} \right] e^{i\xi\eta}, \quad (15) \\ \sigma_{y\eta 1} &= \mu \left[2\xi \frac{\partial \Phi_{11}}{\partial y} i - \xi \frac{\partial \Phi_{21}}{\partial x} i - \xi^2 (1 + m_s^2) \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial y} \right] e^{i\xi\eta}, \\ \sigma_{xy1} &= \mu \left(2 \frac{\partial^2 \Phi_{11}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Phi_{21}}{\partial x^2} + 2\xi \frac{\partial^2 \Phi_{31}}{\partial x \partial y} i \right) e^{i\xi\eta}. \end{aligned}$$

В дозвуковом случае $M_{sk} < 1$ ($m_{sk} > 0$, $k = 1, 2$), и мы приходим к известным решениям [1] уравнений (11)

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (16)$$

где:

– для массива

$$\Phi_{j1}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j1}^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}) d\zeta; \quad (17)$$

– для ограждающего слоя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) e^{in\theta}, \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r) e^{in\theta}. \quad (18)$$

Здесь $I_n(k_j r)$, $K_n(k_j r)$ — функции Бесселя первого и второго рода от мнимого аргумента, $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$, $j = 1, 2, 3$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{n1}, \dots, a_{n9} — неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Как показано в [1], представление потенциалов для полупространства в форме (16) приводит к их следующим выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) e^{(x-h)f_j} \right] e^{iy\zeta} d\zeta, \quad (19)$$

где $f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}$, $\Phi_{nj} = [(\zeta + f_j)/k_{j1}]^n$, $j = 1, 2, 3$.

Воспользуемся с учётом (19) граничными условиями на свободной от нагрузок поверхности полупространства:

$$\text{при } x = h \quad \sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta 1} = 0. \quad (20)$$

Выделяя коэффициенты при $e^{iy\zeta}$ и приравнявая, в силу произвольности y , их нулю, получим систему трёх уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1}, a_{n2}, a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta_*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}, \quad (21)$$

где

$$\Delta_* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{11}^* = \frac{\Delta_*}{2\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}} - \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2}}, \Delta_{12}^* = -2\zeta(2\rho_*^2 - \beta^2), \Delta_{13}^* = 2\xi(2\rho_*^2 - \beta^2)\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{21}^* = -\frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \Delta_{12}^*, \Delta_{22}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}}, \Delta_{23}^* = -4\xi\zeta \frac{M_{s1}^2}{m_{s1}^2} \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\Delta_{31}^* = -\frac{\Delta_{13}^*}{m_{s1}^2 \xi^2}, \Delta_{32}^* = \frac{\Delta_{21}^*}{\beta^2}, \Delta_{33}^* = -\frac{\Delta_{**}}{2\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}} + \frac{(2\rho_*^2 - \beta^2)^2}{\sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}},$$

$$\alpha = M_{p1} \xi, \quad \beta = M_{s1} \xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2, \quad \Delta_{**} = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2}, \quad \rho_{**}^2 = \xi^2 + (2/m_{s1}^2 - 1)\zeta^2.$$

Заметим, что $\Delta_*(\rho_*)$ — определитель Рэлея, который обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$, или в двух точках $\pm \zeta_R = \pm |\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ — число Маха, c_R — скорость поверхностных волн Рэлея [1], которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что $\Delta_*(\rho_*)$ не обращается в ноль на действительной оси, если $M_R < 1$, или $c < c_R$, т.е. при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (19) можно представить в виде

$$\Phi_{jl} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] e^{iy\zeta} d\zeta. \quad (22)$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость c_R несколько ниже (на 5÷10 %) скорости волн сдвига в массиве [3].

Ограничимся случаем $c < c_R$. Подставляя (22) в (14), (15), получим формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива в декартовых координатах при $c < c_R$:

$$u_{l1} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (U_{lj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + U_{lj}^{(2)} F_{nj}^{(2)}) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta, \quad (23)$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1} = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 (S_{lmj}^{(1)} F_{nj}^{(1)} + S_{lmj}^{(2)} F_{nj}^{(2)}) e^{i(y\zeta + \xi\eta)} d\zeta.$$

Здесь $l = x, y, \eta$, $m = x, y, \eta$;

$$F_{nj}^{(1)} = \frac{e^{-xf_j}}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj}, \quad F_{nj}^{(2)} = e^{(x-h)f_j} \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta_*} e^{-hf_l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl},$$

$$U_{x1}^{(1)} = -U_{x1}^{(2)} = -f_1, \quad U_{x2}^{(1)} = U_{x2}^{(2)} = -\zeta, \quad U_{x3}^{(1)} = -U_{x3}^{(2)} = f_3 \xi,$$

$$U_{y1}^{(1)} = U_{y1}^{(2)} = i\zeta, \quad U_{y2}^{(1)} = -U_{y2}^{(2)} = if_2, \quad U_{y3}^{(1)} = U_{y3}^{(2)} = -i\xi\zeta,$$

$$U_{\eta 1}^{(1)} = U_{\eta 1}^{(2)} = i\xi, \quad U_{\eta 2}^{(1)} = U_{\eta 2}^{(2)} = 0, \quad U_{\eta 3}^{(1)} = U_{\eta 3}^{(2)} = -im_{s1}^2 \xi^2,$$

$$S_{xx1}^{(1)} = S_{xx1}^{(2)} = n_2 + 2(f_1^2 - \xi^2 m_{p1}^2), \quad S_{xx2}^{(1)} = -S_{xx2}^{(2)} = 2\zeta f_2, \quad S_{xx3}^{(1)} = S_{xx3}^{(2)} = -2f_3^2 \xi,$$

$$S_{yy1}^{(1)} = S_{yy1}^{(2)} = n_2 - 2(\zeta^2 + \xi^2 m_{p1}^2), \quad S_{yy2}^{(1)} = -S_{yy2}^{(2)} = -2f_2 \zeta, \quad S_{yy3}^{(1)} = S_{yy3}^{(2)} = 2\xi \zeta^2,$$

$$S_{\eta\eta 1}^{(1)} = S_{\eta\eta 1}^{(2)} = n_2 - 2n_1, \quad S_{\eta\eta 2}^{(1)} = S_{\eta\eta 2}^{(2)} = 0, \quad S_{\eta\eta 3}^{(1)} = S_{\eta\eta 3}^{(2)} = 2m_{s1}^2 \xi^3,$$

$$S_{xy1}^{(1)} = -S_{xy1}^{(2)} = -2f_1 \zeta i, \quad S_{xy2}^{(1)} = S_{xy2}^{(2)} = -(f_2^2 + \zeta^2) i, \quad S_{xy3}^{(1)} = -S_{xy3}^{(2)} = 2f_3 \xi \zeta i,$$

$$S_{\eta y 1}^{(1)} = S_{\eta y 1}^{(2)} = -2\xi \zeta, \quad S_{\eta y 2}^{(1)} = -S_{\eta y 2}^{(2)} = -\xi f_2, \quad S_{\eta y 3}^{(1)} = S_{\eta y 3}^{(2)} = n_2 \zeta,$$

$$S_{x\eta 1}^{(1)} = -S_{x\eta 1}^{(2)} = -2f_1 \xi i, \quad S_{x\eta 2}^{(1)} = S_{x\eta 2}^{(2)} = -\xi \zeta i, \quad S_{x\eta 3}^{(1)} = -S_{x\eta 3}^{(2)} = n_2 f_3 i, \quad n_1 = (1 + m_{p1}^2) \xi^2, \quad n_2 = (1 + m_{s1}^2) \xi^2.$$

Используя известное при $x < h$ соотношение [1]

$$\exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) e^{in\theta} \left[\left(\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2} \right) / k_j \right]^n e^{-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}},$$

представим Φ_{j1} (16) в цилиндрической системе координат:

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1}r) + I_n(k_{j1}r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} e^{-h f_j} d\zeta \right) e^{in\theta}.$$

Подставляя в последнее выражение из (21) $g_j(\xi, \zeta)$, для $c < c_R$, получим:

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1}r) + b_{nj} I_n(k_{j1}r)) e^{in\theta}, \quad (24)$$

где $b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}$, $A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}}{\Delta_*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} e^{-h(f_l + f_j)} d\zeta$.

Подставляя (24) в (12), (13), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния массива в цилиндрических координатах при $c < c_R$:

$$u_{l1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [U_{lj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}r)) a_{nj} + U_{lj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}r)) b_{nj}] e^{i(\xi\eta + n\theta)}, \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_{lm1}}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [S_{lmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}r)) a_{nj} + S_{lmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}r)) b_{nj}] e^{i(\xi\eta + n\theta)}$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$U_{r11}^{(1)} = k_{11} K'_n(k_{11}r), \quad U_{r21}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{21}r), \quad U_{r31}^{(1)} = -\xi k_{31} K'_n(k_{31}r),$$

$$U_{\theta11}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_{11}r)i, \quad U_{\theta21}^{(1)} = -k_{21} K'_n(k_{21}r)i, \quad U_{\theta31}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{31}r)i,$$

$$U_{\eta11}^{(1)} = \xi K_n(k_{11}r)i, \quad U_{\eta21}^{(1)} = 0, \quad U_{\eta31}^{(1)} = -k_{31}^2 K_n(k_{31}r)i,$$

$$S_{rr11}^{(1)} = 2 \left(k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) - \frac{2k_{11} K'_n(k_{11}r)}{r}, \quad S_{rr21}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21}r) - \frac{2k_{21} K'_n(k_{21}r)}{r},$$

$$S_{r\theta11}^{(1)} = -2\xi \left(k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{31}r) + \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta11}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) + \frac{2k_{11} K'_n(k_{11}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta21}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_{21}r)}{r^2} + \frac{2n k_{21} K'_n(k_{21}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta31}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta11}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r), \quad S_{\eta\eta21}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta31}^{(1)} = 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31}r),$$

$$S_{r\theta11}^{(1)} = \left(-\frac{2n K_n(k_{11}r)}{r^2} + \frac{2n k_{11} K'_n(k_{11}r)}{r} \right) i, \quad S_{r\theta21}^{(1)} = \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21}r) + \frac{2k_{21} K'_n(k_{21}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta31}^{(1)} = \left(\frac{2n \xi K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2n \xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta11}^{(1)} = -\frac{2n \xi K_n(k_{11}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta21}^{(1)} = \xi k_{21} K'_n(k_{21}r), \quad S_{\theta\eta31}^{(1)} = \frac{n \xi^2 (1 + m_{31}^2) K_n(k_{31}r)}{r},$$

$$S_{r\eta11}^{(1)} = 2\xi k_{11} K'_n(k_{11}r)i, \quad S_{r\eta21}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{21}r)i}{r}, \quad S_{r\eta31}^{(1)} = -\xi^2 k_{31} (1 + m_{31}^2) K'_n(k_{31}r)i;$$

$K'_n(k_{j1}r) = \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)}$; $U_{lj1}^{(2)}$, $S_{lmj1}^{(2)}$ получаются из $U_{lj1}^{(1)}$, $S_{lmj1}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Подставляя Φ_{j2} (16) в (12), (13), получаем формулы для вычислений компонент напряженно-деформированного состояния ограждающего слоя при $c < c_R$:

$$u_{j2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[U_{lj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + U_{lj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}, \quad (26)$$

$$\frac{\sigma_{lm2}}{\mu_2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + S_{lmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6} \right] e^{i(\xi\eta+n\theta)}.$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$U_{r12}^{(1)} = k_{12} K_n'(k_{12}r), \quad U_{r22}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{22}r), \quad U_{r32}^{(1)} = -\xi k_{32} K_n'(k_{32}r),$$

$$U_{\theta12}^{(1)} = \frac{n}{r} K_n(k_{12}r)i, \quad U_{\theta22}^{(1)} = -k_{22} K_n'(k_{22}r)i, \quad U_{\theta32}^{(1)} = -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{32}r)i,$$

$$U_{\eta12}^{(1)} = \xi K_n(k_{12}r)i, \quad U_{\eta22}^{(1)} = 0, \quad U_{\eta32}^{(1)} = -k_{32}^2 K_n(k_{32}r)i,$$

$$S_{rr12}^{(1)} = 2 \left(k_{12}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) - \frac{2k_{12} K_n'(k_{12}r)}{r}, \quad S_{rr22}^{(1)} = \frac{2n}{r^2} K_n(k_{22}r) - \frac{2k_{22} K_n'(k_{22}r)}{r},$$

$$S_{rr32}^{(1)} = -2\xi \left(k_{32}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{32}r) + \frac{2\xi k_{32} K_n'(k_{32}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta12}^{(1)} = -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) + \frac{2k_{12} K_n'(k_{12}r)}{r},$$

$$S_{\theta\theta22}^{(1)} = -\frac{2n K_n(k_{22}r)}{r^2} + \frac{2nk_{22} K_n'(k_{22}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta32}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{32} K_n'(k_{32}r)}{r},$$

$$S_{\eta\eta12}^{(1)} = -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_2 M_{p2}^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r), \quad S_{\eta\eta22}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta32}^{(1)} = 2m_{32}^2 \xi^3 K_n(k_{32}r),$$

$$S_{r\theta12}^{(1)} = \left(-\frac{2n K_n(k_{12}r)}{r^2} + \frac{2nk_{12} K_n'(k_{12}r)}{r} \right) i, \quad S_{r\theta22}^{(1)} = \left(-\left(k_{22}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{22}r) + \frac{2k_{22} K_n'(k_{22}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{r\theta32}^{(1)} = \left(\frac{2n\xi K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{32} K_n'(k_{32}r)}{r} \right) i,$$

$$S_{\theta\eta12}^{(1)} = -\frac{2n\xi K_n(k_{12}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta22}^{(1)} = \xi k_{22} K_n'(k_{22}r), \quad S_{\theta\eta32}^{(1)} = \frac{n\xi^2 (1 + m_{32}^2) K_n(k_{32}r)}{r},$$

$$S_{r\eta12}^{(1)} = 2\xi k_{12} K_n'(k_{12}r)i, \quad S_{r\eta22}^{(1)} = \frac{\xi n K_n(k_{22}r)i}{r}, \quad S_{r\eta32}^{(1)} = -\xi^2 k_{32} (1 + m_{32}^2) K_n'(k_{32}r)i; \quad K_n'(k_{j2}r) = \frac{dK_n(k_{j2}r)}{d(k_{j2}r)};$$

$U_{lj2}^{(2)}$, $S_{lmj2}^{(2)}$ получаются из $U_{lj2}^{(1)}$, $S_{lmj2}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

При действии на оболочку бегущей синусоидальной нагрузки в установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (9), поэтому

$$u_{0j}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta} e^{j\xi\eta}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (2), для n -го члена разложения, получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 u_{0m\eta} + v_{02} n \xi_0 u_{0n\theta} - 2iv_0 \xi_0 u_{0nr} &= G_0 (P_{m\eta} - q_{m\eta 2}), \\ v_{02} n \xi_0 u_{0m\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} &= G_0 (P_{n\theta} - q_{n\theta 2}), \\ 2iv_0 \xi_0 u_{0m\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} &= G_0 (P_{nr} - q_{nr 2}), \end{aligned} \quad (28)$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2$, $\xi_0 = \xi R$,

$$\alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + v_{01} n^2, \quad \beta_0^2 = v_{01} \xi_0^2 + 2n^2, \quad \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, \quad \varepsilon_0^2 = v_{01} \xi_0^2 M_{s0}^2,$$

$$v_{01} = 1 - v_0, \quad v_{02} = 1 + v_0, \quad M_{s0} = c / c_{s0}, \quad c_{s0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, \quad G_0 = -\frac{v_{01} R^2}{\mu_0 h_0};$$

при $r = R_1$: $q_{nj2} = (\sigma_{rj2})_n$, $j = \eta, \theta, r$.

Разрешая (28) относительно $u_{0n\eta}$, $u_{0n\theta}$, u_{0nr} , находим:

$$u_{0n\eta} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\eta j} (P_{nj} - q_{nj2}), u_{0n\theta} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{\theta j} (P_{nj} - q_{nj2}), u_{0nr} = \frac{G_0}{\delta_n} \sum_{j=1}^3 \delta_{rj} (P_{nj} - q_{nj2}). \quad (29)$$

Здесь $\delta_n = \delta_{|\eta|} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3$,

$$\delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \quad \delta_{\eta 3} = i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3),$$

$$\delta_{\theta 1} = \delta_{\eta 2}, \quad \delta_{\theta 2} = (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \quad \delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3),$$

$$\delta_{r1} = -\delta_{\eta 3}, \quad \delta_{r2} = -\delta_{\theta 3}, \quad \delta_{r3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2, \quad \xi_1 = 2n, \quad \xi_2 = 2\nu_0 \xi_0, \quad \xi_3 = \nu_{02} \xi_0 n;$$

для q_{nj1} и q_{nj2} индекс $j = 1$ соответствует индексу η , $j = 2$ — θ , $j = 3$ — r .

Для определения входящих в выражения (23), (25), (26) коэффициентов a_{n1}, \dots, a_{n9} воспользуемся следующими граничными условиями.

При скользящем контакте слоёв оболочки:

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\eta 1} = 0, \quad \sigma_{r\theta 1} = 0, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{r2} = u_{0r}, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0, \quad j = r, \theta, \eta, \quad (30)$$

– для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{j1} = u_{j2}, \quad \sigma_{rj1} = \sigma_{rj2},$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{r2} = u_{0r}, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (31)$$

При жёстком сопряжении слоёв оболочки:

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad \sigma_{rr1} = \sigma_{rr2}, \quad \sigma_{r\eta 1} = 0, \quad \sigma_{r\theta 1} = 0, \quad \sigma_{r\eta 2} = 0, \quad \sigma_{r\theta 2} = 0,$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{j2} = u_{0j}, \quad j = r, \theta, \eta, \quad (32)$$

– для жёсткого контакта оболочки с массивом

$$\text{при } r = R_1 \quad u_{j1} = u_{j2}, \quad \sigma_{rj1} = \sigma_{rj2},$$

$$\text{при } r = R_2 \quad u_{j2} = u_{0j}, \quad j = r, \theta, \eta. \quad (33)$$

Подставляя в любое из граничных условий (30)-(33) соответствующие выражения и приравнявая коэффициенты рядов при $e^{in\theta}$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой рекомендуется использовать метод последовательных отражений (приближений) [4]. Согласно этому методу граничные условия можно представить в виде бесконечной системы линейных алгебраических уравнений блочно-диагонального типа с матрицами (9×9) вдоль главной диагонали:

– граничные условия (30)

$$\sum_{j=1}^3 \left[U_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{rrj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - \tau S_{rrj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau S_{rrj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rrj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 S_{r_{nj1}}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0, & \text{при } K=0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r_{nj1}}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 S_{r_{\theta j1}}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0, & \text{при } K=0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r_{\theta j1}}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{nj2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{nj2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{\theta j2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{\theta j2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) + \tau \delta_{r3} S_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) + \tau \delta_{r3} S_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} P_{ni}, & \text{при } K=0, \\ 0, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{nj2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{nj2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{\theta j2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{\theta j2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0;$$

– граничные условия (31)

$$\sum_{j=1}^3 \left[U_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } K=0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{mj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{rmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } K=0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left\{ \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) + \tau \delta_{r3} S_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) + \tau \delta_{r3} S_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} P_{ni}, & \text{при } K=0, \\ 0, & \text{при } K \neq 0, \end{cases}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{nj2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{nj2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0,$$

$$\sum_{j=1}^3 \left[S_{r_{\theta j2}}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r_{\theta j2}}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0;$$

– граничные условия (32)

$$\sum_{j=1}^3 \left[U_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 \left[S_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - \tau S_{rj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau S_{rj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 S_{rj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} = \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{r\theta j1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 \left[S_{r\eta j2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\eta j2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \\
 &\sum_{j=1}^3 \left[S_{r\theta j2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} + S_{r\theta j2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = 0, \\
 &\sum_{j=1}^3 \left\{ \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) + \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right. \\
 &\left. + \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) + \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} P_{ni}, & \text{при } K = 0, \\ 0, & \text{при } K \neq 0; \end{cases}
 \end{aligned}$$

– граничные условия (33)

$$\begin{aligned}
 &\sum_{j=1}^3 \left[U_{mj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - U_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 U_{mj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 \left[S_{rmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K)} - \tau S_{rmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+3}^{(2K)} - \tau S_{rmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_1)) a_{nj+6}^{(2K)} \right] = \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{при } K = 0, \\ -\sum_{j=1}^3 S_{rmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1}R_1)) a_{nj}^{(2K-1)}, & \text{при } K \neq 0, \end{cases} \\
 &\sum_{j=1}^3 \left\{ \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) + \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(1)}(K_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+3}^{(2K)} + \right. \\
 &\left. + \left[\frac{\delta_n}{G_0 \mu_1} U_{mj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) + \tau \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} S_{rij2}^{(2)}(I_n(k_{j2}R_2)) \right] a_{nj+6}^{(2K)} \right\} = \begin{cases} \frac{1}{\mu_1} \sum_{i=1}^3 \delta_{mi} P_{ni}, & \text{при } K = 0, \\ 0, & \text{при } K \neq 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Здесь $m = r, \theta, \eta$, $\tau = \mu_2/\mu_1$; для S_{rij} $i = 1 = \eta$, $i = 2 = \theta$, $i = 3 = r$.

Если определитель соответствующей определённым граничным условиям системы уравнений не равен нулю, окончательно получим: $a_{nJ} = a_{nJ}^{(0)} + a_{nJ}^{(2)} + a_{nJ}^{(4)} + \dots, J = 1, 2, \dots, 9$.

После определения коэффициентов a_{nJ} ($J = 1, 2, \dots, 9$) компоненты НДС массива и ограждающего слоя можно вычислить по формулам (23), (25), (26).

В случае произвольной периодической по η нагрузки, разлагая ее в ряд Фурье, для каждой составляющей ряда получим рассмотренную выше задачу.

Решение аналогичной задачи для упругого пространства можно получить из данного решения, если исключить из (16) $\Phi_{j1}^{(2)}$ и рассматривать граничные условия только при $K = 0$.

References

- 1 Erzhanov Zh.S., Aitaliev Sh.M., Alekseyeva L.A. Dynamics of tunnels and underground pipelines. — Alma-Ata: Nauka, 1989. — 240 p.
- 2 Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Problem of permanent traffic load in elastically supported cylindrical cavity in elastic half-space // International Applied Mechanics. — 2009. — № 9. — P. 75–85.
- 3 Timoshenko S.P., Goodier J.N. Theory of Elasticity. — Moscow: Nauka, 1979. — 560 p.
- 4 Ukrainets V.N. Dynamics of shallow tunnels and underground pipelines under moving loads. — Pavlodar: The scientific publishing center of PSU named after S.Toraigrov, 2006. — 123 p.

В.Н.Украинец

Серпимді жартылай кеңістікте екі қабатты қабықшаға мерзімдік қозғалмалы жүктеменің ықпалы туралы есеп

Серпимді жартылай кеңістікте екі қабатты қабықшаға қозғалмалы мерзімдік жүктеменің әрекеті туралы есептің толық аналитикалық шешімі шығарылды. Қабықшаның жуан сыртқы қабатын сипаттау үшін серпимділік теорияның динамикалық теңдеулері қолданылды, жіңішке ішкі қабаттың тербелісі координаттардың қозғалмалы жүйесінде жіңішке қабықша теорияның классикалық теңдеулермен сипатталды. Шешім айнымалылардың толық емес бөлінуінің әдісіне негізделген. Есепті санмен шешу кезінде жүйелі шағылудың (жуықтаудың) әдісін ұсынуға болады.

V.N.Ukrainets

Problem about action of mobile periodic load on a two-layer lining in elastic half-space

The exact analytical decision of a problem on action of mobile periodic loading on a two-layer shall in elastic half-space is received. For the description of a thick external layer of a shall the dynamic equations of the theory of elasticity are used, fluctuations of a thin inside layer are described by the classical equations of the theory of thin shells in mobile system of coordinates. The decision is based on a method of incomplete division of variables. At numerical realization of a problem it is recommended to apply a method of consecutive reflections.