

$$\max \left\{ \|u\|_0, \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_0 \right\} \leq M_\nu(x, h) \max \left\{ \max_{t \in [0, T]} \|\psi(t)\|, \|f\|_0 \right\},$$

где

$$M_\nu(x, h) = a_0(x) e^{\int_0^x a_0(\xi) d\xi} \int_0^x \max \{a_1(\xi), a_2(\xi)\} d\xi + \max \{a_1(x), a_2(x)\} + \\ + \max \{b_1(x) + b_3(x), \alpha(x)[b_1(x) + b_3(x)] + 1\} b_2(x).$$

Таким образом, получены достаточные условия однозначной разрешимости задачи (1)–(3).

References

1. *Cesari L.* Tr. International symposium on nonlinear fluctuations. — Vol. 1. — Kiev, 1963. — P. 440–457.
2. *Veivoda O et al.* Partial differential equations: Time-periodic solutions // *Alphen aan den Rijn*. — Sijthoff: Noordhoff, 1981. — 358 p.
3. *Ptashnik B.I.* The incorrect boundary problems for differential equations with quotient derivatives. — Kiev, 1984.
4. *Kiguradze T.I.* On periodic boundary problems for linear hyperbolic equations // *Differential equations*. — 1993. — Vol. 29. — № 2. — P. 281–297.
5. *Mitropoliskiy Yu.A., Homa G.P., Gromyak M.I.* The asymptotic methods of the study quasiwave equations of the hyperbolic type. — Kiev: Scientific idea, 1991. — 232 p.
6. *Asanova A.T., Dzhumabaev D.S.* One-valued solvability nonlocal boundary problems for systems of the hyperbolic equations. *The Differential equations*. 2003. — Vol. 39. — № 10. — P. 1343–1354.
7. *Trenogin V.A.* The functional analysis. — M.: Science, 1980.

УДК 517.956.4

О разрешимости некоторых обратных задач для уравнения теплопроводности дробного порядка

On the solvability of some inverse problems for the heat equation of fractional order

Турметов Б.Х., Шиналиев К.М.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Туркестан (E-mail: turmetovbh@mail.ru)

Мақалада бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін кейбір сызықтық кері есептердің шешімділігі мәселесі қарастырылады. Теңдеудің шешімімен бірге оң жағындағы белгісіз функцияны табу қажет болады. Есептің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

In this paper we study the solvability of some linear inverse problems for differential equations of fractional order. In this paper, together with a solution of a equation it need to find a unknown right-hand side. The theorems of the existence and uniqueness of the solution of the problem are proved.

1. Введение.

При моделировании процессов определения температуры и плотности источников тепла по заданным начальной и конечной температурам возникают обратные задачи для уравнения теплопроводности. В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости некоторых обратных задач для дифференциального уравнения дробного порядка, обобщающие уравнению теплопроводности на дробные показатели операторов.

Пусть $0 < \alpha$ — некоторое действительное число. Для функции $g(t)$, заданной на интервале $(0, l)$, $l < \infty$, оператор интегрирования α -го порядка определяется равенством

$$I^\alpha[g](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} g(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Для любого $\alpha \in (0,1]$ выражение $D_*^\alpha[f](t) = I^{1-\alpha} \frac{dg}{dt}(t)$ называется оператором дробного дифференцирования порядка α в смысле Капуто [1]. Так как при $\alpha \rightarrow 0$ $I^\alpha g(t) \rightarrow g(t)$ почти всюду [2], то можно положить $I^0 g(t) = g(t)$ и, значит, при $\alpha = 1$ получаем $D_*^\alpha g(t) = \frac{dg}{dt}(t)$.

Пусть $\Omega = \{(x,t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$. Рассмотрим в области Ω задачу о нахождении правой части $f(x)$ обобщенного уравнения теплопроводности

$$D_*^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x) \quad (1)$$

и его решению $u(x,t)$, удовлетворяющем начальному и конечному условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2)$$

и краевым условиям вида

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0, \\ c_1 u_x(0,t) + d_1 u_x(1,t) + c_0 u(0,t) + d_0 u(1,t) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $a_k, b_k, c_k, d_k, k = 0,1$, — действительные числа, а $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — заданные функции.

Под решением задачи (1)–(3) будем понимать пару функций $(u(x,t), f(x))$ таких, что $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, $f(x) \in C[0,1]$, $D_*^\alpha u(x,t), u_{xx}(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям (2) и (3).

Вопросам разрешимости обратных задач для уравнения (1) в случае $\alpha = 1$ посвящены многочисленные работы [3–5]. В [6] изучены частные случаи задачи (1)–(3), когда краевые условия являются периодическими, или условиями типа Самарского-Ионкина. В настоящей работе, используя методику работы [5], исследуются обратные задачи для уравнения (1) с общими краевыми условиями, являющимися регулярными, но не усиленно регулярными.

Применяя метод Фурье для решения задачи (1)–(3), получаем спектральную задачу для оператора ℓ , заданного дифференциальным выражением $\ell(y) = -y''(x), 0 < x < 1$ и краевыми условиями

$$\begin{cases} a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \\ c_1 y'(0) + d_1 y'(1) + c_0 y(0) + d_0 y(1) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Краевые условия (4) называются регулярными [7], если выполнено одно из следующих трех условий:

- i. $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$;
- ii. $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0, |a_1| + |b_1| > 0, a_1 d_0 + b_1 c_0 \neq 0$;
- iii. $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0, a_1 d_0 + b_1 c_0 \neq 0$.

Регулярные краевые условия являются усиленно регулярными в первом и третьем случаях, а во втором — при дополнительном условии

$$a_1 c_0 + b_1 d_0 \neq \pm [a_1 d_0 + b_1 c_0]. \quad (6)$$

2. Случай краевых условий Штурма

Следуя методике работы [5], задачу (1)–(3) начнем изучать со случая условий типа Штурма, когда $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$. Пусть λ_k — собственные значения оператора ℓ , пронумерованные в порядке возрастания их модулей, а $y_k(x), k = 1, 2, \dots$, — соответствующие им нормированные собственные функции. Известно, что собственные значения таких задач являются действительными и простыми, а система их собственных функций образует ортонормированный базис пространства $L_2[0,1]$ [8]. Поэтому решение $(u(x,t), f(x))$ задачи (1)–(3) представимо в виде рядов

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x), \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k y_k(x). \quad (7)$$

Подставляя (7) в уравнение (1), в начальные и конечные условия (2), для нахождения неизвестных функций $u_k(t)$ и коэффициентов f_k получаем следующие задачи:

$$u_k^{(\alpha)}(t) + \lambda_k u_k(t) = f_k, \tag{8}$$

$$u_k(0) = \varphi_k, u_k(T) = \psi_k, \tag{9}$$

где $u_k^{(\alpha)}(t) = D_*^\alpha u_k(t)$, φ_k, ψ_k — коэффициенты Фурье разложений функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ортогональные ряды по системе $\{y_k(x)\}$, т.е. $\varphi_k = (\varphi(x), y_k(x))$, $\psi_k = (\psi(x), y_k(x))$.

Исследуем задачу (8)–(9). Известно, что общее решение уравнения (8) имеет вид [1]

$$u_k(t) = u_k(0)E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha) + f_k \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau, \tag{10}$$

где $E_{\alpha,\alpha}(z)$ — функция типа Миттаг-Леффлера, имеющая вид:

$$E_{\alpha,\mu}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{\Gamma(\alpha i + \mu)}, E_\alpha(z) = E_{\alpha,1}(z).$$

Вычислим интеграл в правой части равенства (10). Используя представление функции $E_{\alpha,\alpha}$ в виде ряда, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_k(t-\tau)^\alpha) d\tau &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^i}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha i + \alpha - 1} d\tau = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-\lambda_k)^i}{\Gamma(\alpha i + \alpha)} \cdot \frac{t^{\alpha i + \alpha}}{\alpha i + \alpha} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda_k)^i \frac{t^{\alpha i + \alpha}}{\Gamma(\alpha i + \alpha + 1)} = t^\alpha \cdot E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение уравнения (8) представляется в виде

$$u_k(t) = u_k(0)E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha) + f_k t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha).$$

Подставляя последнее выражение в условия (9), с учетом равенства $E_\alpha(0) = 1$, получаем:

$$u_k(0) = \varphi_k, \quad \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha) + f_k T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k T^\alpha) = \varphi_k.$$

Следовательно, при $\lambda_k \neq 0$

$$f_k = \frac{\psi_k - \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k T^\alpha)} \tag{11}$$

и

$$u_k(t) = \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k t^\alpha) + \frac{\psi_k - \varphi_k E_\alpha(-\lambda_k T^\alpha)}{T^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k T^\alpha)} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k t^\alpha). \tag{12}$$

Далее, так как $0 < \alpha < 1$, $\alpha + 1 < 2$, то из результатов работы [9] следует, что функция $E_{\alpha,\alpha+1}(z)$ не имеет вещественных корней и поэтому $E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_k T^\alpha) \neq 0$.

Если $\lambda_0 = 0$, то $E_\alpha(0) = 1$, $E_{\alpha,\alpha+1}(0) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)}$, и тогда

$$u_0(0) = \varphi_0, \quad u_0(T) = \varphi_0 + f_0 \cdot T^\alpha \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} = \psi_0.$$

Следовательно,

$$f_0 = \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha + 1),$$

$$u_0(t) = \varphi_0 + \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T^\alpha} \cdot \Gamma(\alpha + 1) t^\alpha \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} = \varphi_0 + \frac{\psi_0 - \varphi_0}{T^\alpha} \cdot t^\alpha.$$

Таким образом, формулы (11) и (12) остаются верными и для случая $\lambda_0 = 0$.

Заметим также, что в случае $\alpha = 1$ имеет место равенство $E_\alpha(-\lambda_k t) = e^{-\lambda_k t}$ и

$$\begin{aligned} tE_{1,2}(-\lambda_k t) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda_k)^i \frac{t^{i+1}}{\Gamma(i+2)} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda_k)^i \frac{t^{i+1}}{(i+1)!} = \\ &= -\frac{1}{\lambda_k} \sum_{j=1}^{\infty} (-\lambda_k)^j \frac{t^j}{j!} = -\frac{1}{\lambda_k} \left[\sum_{j=0}^{\infty} (-\lambda_k)^j \frac{t^j}{j!} - 1 \right] = -\frac{1}{\lambda_k} [e^{-\lambda_k t} - 1] = \frac{1 - e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k}. \end{aligned}$$

Значит, когда $\alpha = 1$, то формулы (11) и (12) имеют вид

$$f_k = \frac{\lambda_k}{1 - e^{-\lambda_k T}} (\psi_k - e^{-\lambda_k T} \varphi_k),$$

$$u_k(t) = e^{-\lambda_k T} \varphi_k + \frac{1 - e^{-\lambda_k T}}{1 - e^{-\lambda_k T}} (\psi_k - e^{-\lambda_k T} \varphi_k).$$

Далее, подставляя (11) и (12) в (7), получаем формальное решение задачи (1)–(3).

Для завершения исследования необходимо обосновать сходимость всех встречающихся рядов.

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 1. Пусть $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$, т.е. краевые условия (4) являются типа Штурма. Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0, 1]$ и функции $\varphi(x), \psi(x), \varphi''(x), \psi''(x)$ удовлетворяют краевым условиям (4), то существует единственное решение $u(x, t), f(x)$ задачи (1)–(3).

Доказательство. Так как функции $\varphi''(x), \psi''(x) \in C^2[0, 1]$ и удовлетворяют краевым условиям (4), то по теореме В.А. Стеклова [8] они разлагаются в абсолютно и равномерно сходящиеся ряды Фурье по собственным функциям $\{y_k(x)\}$. Поэтому ряды

$$\varphi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k y_k(x), \quad \psi''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \psi_k y_k(x) \quad (13)$$

сходятся абсолютно и равномерно.

Далее, с учетом $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = +\infty$ и асимптотических оценок для функции $E_\alpha(z), E_{\alpha, \mu}(z)$ при $\arg z = \pi$ [1]

$$|E_\alpha(z)| \leq \frac{M}{1+z}, \quad E_{\alpha, \mu}(z) = -\sum_{k=0}^p \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k\alpha)} + O(z^{-p-1})$$

из (11), (12) получим оценки, равномерные по k :

$$|f_k| \leq c(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

$$|u_k(t)| \leq c(|\varphi_k| + |\psi_k|),$$

$$|D_*^\alpha u_k(t)| \leq c(|\lambda_k| |\varphi_k| + |\psi_k|).$$

Из этих оценок и из равномерной и абсолютной сходимости рядов (13) следует сходимость рядов (7) и

$$u_x(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k'(x), \quad u_{xx}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k''(x), \quad D_*^\alpha u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k^{(\alpha)}(t) y_k(x),$$

т.е. $f(x) \in C[0, 1], u, u_x, u_{xx}, D_*^\alpha u(x, t) \in C(\bar{\Omega})$.

Так как система $\{y_k(x)\}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2[0, 1]$, то любое решение задачи (1)–(3) из данного класса представимо рядами (7). Из однозначности построения решений (11), (12) задач (8)–(9) следует единственность решения задачи (1)–(3).

Теорема доказана.

3. Регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия

Приведем известное утверждение относительно регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий [4].

Лемма 1. Если краевые условия (4) являются регулярными, но не усиленно регулярными, то краевые условия (3) всегда могут быть приведены к виду

$$\begin{cases} a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = 0, \\ c_0 u_x(0, t) + d_0 u_x(1, t) = 0, \quad |a_1| + |b_1| > 0 \end{cases} \quad (14)$$

одного из следующих типов:

$$\begin{aligned} & \text{I. } a_1 + b_1 = 0, \quad c_0 - d_0 \neq 0; \\ & \text{II. } a_1 - b_1 = 0, \quad c_0 + d_0 \neq 0; \\ & \text{III. } c_0 - d_0 = 0, \quad a_1 + b_1 \neq 0; \\ & \text{IV. } c_0 + d_0 = 0, \quad a_1 - b_1 \neq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

В дальнейшем будем рассматривать только краевые условия вида (14).

Введем в рассмотрение четные $C(x, t)$ и нечетные $S(x, t)$ по переменной x части функции $u(x, t)$:

$$u(x, t) = C(x, t) + S(x, t),$$

где

$$2C(x, t) = u(x, t) + u(1 - x, t), \quad 2S(x, t) = u(x, t) - u(1 - x, t). \quad (16)$$

Очевидно, что для всех $(x, t) \in \Omega$ имеет место

$$\begin{cases} C(x, t) = C(1 - x, t), & S(x, t) = -S(1 - x, t), \\ C_x(x, t) = -C_x(1 - x, t), & S_x(x, t) = S_x(1 - x, t). \end{cases} \quad (17)$$

Таким образом, для построения решения $u(x, t)$ достаточно определить функции $C(x, t)$ и $S(x, t)$ в области $\Omega_0 = \{(x, t) : 0 < 2x < 1, 0 < t < T\} \subset \Omega$.

Легко показать, что функции $C(x, t)$ и $S(x, t)$ являются в области Ω_0 решениями уравнения

$$D_{*t}^\alpha C(x, t) - C_{xx}(x, t) = f_0(x), \quad (18)$$

$$D_{*t}^\alpha S(x, t) - S_{xx}(x, t) = f_1(x) \quad (19)$$

и удовлетворяют начальным и конечным условиям

$$C(x, 0) = \varphi_0(x), \quad C(x, T) = \psi_0(x), \quad 0 \leq 2x \leq 1, \quad (20)$$

$$S(x, 0) = \varphi_1(x), \quad S(x, T) = \psi_1(x), \quad 0 \leq 2x \leq 1, \quad (21)$$

где

$$2f_0(x) = f(x) + f(1 - x), \quad 2f_1(x) = f(x) - f(1 - x);$$

$$2\varphi_0(x) = \varphi(x) + \varphi(1 - x), \quad 2\varphi_1(x) = \varphi(x) - \varphi(1 - x);$$

$$2\psi_0(x) = \psi(x) + \psi(1 - x), \quad 2\psi_1(x) = \psi(x) - \psi(1 - x).$$

Проверим условия (18), (20).

Пусть $C(x, t) = [u(x, t) + u(1 - x, t)]/2$ и $0 < 2x < 1$. Тогда очевидно, что $0 < 1 - x < 1$ и

$$D_{*t}^\alpha C(x, t) = \frac{1}{2} [D_{*t}^\alpha u(x, t) - D_t^\alpha u(1 - x, t)],$$

$$C_{xx}(x, t) = \frac{1}{2} [u_{xx}(x, t) - u_{xx}(1 - x, t)].$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D_{*t}^\alpha C(x, t) - C_{xx}(x, t) &= \frac{1}{2} [D_{*t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) + D_t^\alpha u(1 - x, t) - u_{xx}(1 - x, t)] = \\ &= \frac{1}{2} [f(x) + f(1 - x)] = f_0(x). \end{aligned}$$

Проверим условия (20). Имеем

$$C(x, 0) = [u(x, 0) + u(1 - x, 0)]/2 = [\varphi(x) + \varphi(1 - x)]/2 = \varphi_0(x),$$

$$C(x, T) = [u(x, T) + u(1 - x, T)]/2 = [\psi(x) + \psi(1 - x)]/2 = \psi_0(x).$$

Аналогично проверяются выполнения условий (19) и (21). Найдем теперь краевые условия, которым на границе области Ω_0 удовлетворяют функции $C(x, t)$ и $S(x, t)$. Предполагая, что функция $u(x, t) = C(x, t) + S(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (3), с учетом соотношений (17) получаем:

$$\begin{aligned} &a_1 u_x(0, t) + b_1 u_x(1, t) + a_0 u(0, t) + b_0 u(1, t) = \\ &= a_1 C_x(0, t) + a_1 S_x(0, t) + b_1 C_x(1, t) + b_1 S_x(1, t) + a_0 C(0, t) + a_0 S(0, t) + b_0 C(1, t) + b_0 S(1, t) = \\ &= (a_1 - b_1) C_x(1, t) + (a_1 + b_1) S_x(0, t) + (a_0 + b_0) C(0, t) + (a_0 - b_0) S(0, t) = 0, \\ &a_0 u(0, t) + d_0 u(1, t) = c_0 C(0, t) + c_0 S(0, t) + d_0 C(1, t) + d_0 S(1, t) = \\ &= (c_0 + d_0) C(0, t) + (c_0 - d_0) S(0, t) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} (a_1 - b_1) C_x(1, t) + (a_1 + b_1) S_x(0, t) + (a_0 + b_0) C(0, t) + (a_0 - b_0) S(0, t) = 0, \\ (c_0 + d_0) C(0, t) + (c_0 - d_0) S(0, t) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

При выполнении каждого из условий регулярности (15), но не усиленной регулярности краевых условий один из “главных” коэффициентов соотношений (22) всегда обращается в нуль. Пользуясь этим свойством, отдельно для каждого из типов (15) получаем для функций $C(x,t)$ и $S(x,t)$ следующие краевые условия на левой границе области Ω_0 :

I. При $a_1 + b_1 = 0$, $c_0 - d_0 \neq 0$:

$$(a_1 - b_1)(c_0 - d_0)C_x(0,t) - (a_0d_0 - b_0c_0)C(0,t) = 0, \quad (23)$$

$$S(0,t) = -\frac{c_0 + d_0}{c_0 - d_0}C(0,t). \quad (24)$$

II. При $a_1 - b_1 = 0$, $c_0 + d_0 \neq 0$:

$$(a_1 + b_1)(c_0 + d_0)S_x(0,t) + (a_0d_0 - b_0c_0)S(0,t) = 0, \quad (25)$$

$$C(0,t) = \frac{c_0 - d_0}{c_0 + d_0}S(0,t). \quad (26)$$

III. При $c_0 - d_0 = 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$:

$$C(0,t) = 0, \quad (27)$$

$$(a_1 + b_1)S_x(0,t) + (a_0 - b_0)S(0,t) = -(a_1 - b_1)C_x(0,t). \quad (28)$$

IV. При $c_0 + d_0 = 0$, $a_1 - b_1 \neq 0$:

$$C(0,t) = 0, \quad (29)$$

$$(a_1 - b_1)C_x(0,t) + (a_0 + b_0)C(0,t) = -(a_1 + b_1)S_x(0,t). \quad (30)$$

Дополнительно из соотношений (17) получаем для правой части границы области Ω_0 краевые условия

$$C_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, \quad (31)$$

$$S\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0. \quad (32)$$

Следовательно, каждый из типов (15) не усиленно регулярных краевых условий сводится к последовательному решению двух краевых задач.

Задача I. В области Ω_0 найти решение $C(x,t)$ уравнения (18), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (20) и краевым условиям (23), (31). Используя найденное $C(x,t)$ в области Ω_0 , найти решение $S(x,t)$ уравнения (19), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (21) и краевым условиям (24), (32).

Задача II. В области Ω_0 найти решение $S(x,t)$ уравнения (19), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (21) и краевым условиям (25), (32). Используя найденное $S(x,t)$ в области Ω_0 , найти решение $C(x,t)$ уравнения (18), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (20) и краевым условиям (26), (31).

Задача III. В области Ω_0 найти решение $C(x,t)$ уравнения (18), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (20) и краевым условиям (27), (31). Используя найденное $C(x,t)$ в области Ω_0 , найти решение $S(x,t)$ уравнения (19), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (21) и краевым условиям (28), (32).

Задача IV. В области Ω_0 найти решение $S(x,t)$ уравнения (19), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (21) и краевым условиям (29), (32). Используя найденное $S(x,t)$ в области Ω_0 , найти решение $C(x,t)$ уравнения (18), удовлетворяющее начальному и конечному условиям (20) и краевым условиям (30), (31).

Все полученные на границе области Ω_0 новые краевые условия для функций $C(x,t)$ и $S(x,t)$ являются разделенными, а следовательно, усиленно регулярными.

Таким образом, доказано следующее утверждение:

Лемма 2. Решение задачи (1)–(3) в случае регулярных, но не усиленно регулярных условий всегда может быть эквивалентно сведено к последовательному решению двух задач с усиленно регулярными краевыми условиями Штурма.

По найденным в области Ω_0 решениям краевых задач решение задачи (1)–(3) строится по формуле

$$u(x,t) = \begin{cases} C(x,t) + S(x,t), & 2x \leq 1 \\ C(1-x,t) - S(1-x,t), & 2x \geq 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) + f_1(x), & 2x \leq 1 \\ f_0(1-x) - f_1(1-x), & 2x \geq 1. \end{cases}$$

При этом гладкость полученного решения во всей области Ω_0 обеспечивается условиями (17).

4. Решение задачи для случая не усиленно регулярных краевых условий

Пользуясь леммой 2, существование решения задачи (1)–(3), его единственность и гладкость могут быть получены из теоремы 1 для соответствующих задач с усиленно регулярными краевыми условиями типа Штурма. Наличие неоднородного краевого условия на левой границе области Ω_0 не является существенным усложнением, поэтому можно обойтись стандартным способом.

Приведем основное утверждение работы.

Теорема 2. Пусть краевые условия (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными, т.е. коэффициенты краевых условий удовлетворяют одному из условий (15). Если $\varphi(x), \psi(x) \in C^4[0,1]$ и функции $\varphi_k(x), \psi_k(x), \varphi''(x), \psi''(x)$ удовлетворяют краевым условиям (4), то существует единственное решение $f(x) \in C[0,1]$, $u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ задачи (1)–(3), для которого $D_{*t}^\alpha u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$, $u_x, u_{xx} \in C(\bar{\Omega})$.

Доказательство. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться в том, что при выполнении условий теоремы начальные и конечные функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \psi_0(x), \psi_1(x)$ принадлежат пространству $C^4[0,1/2]$ и удовлетворяют соответствующим краевым условиям типа Штурма в точках $x=0$ и $x=1/2$. Доказательство теоремы завершается применением леммы 1 для соответствующих задач с краевыми условиями типа Штурма в области Ω_0 .

References

1. Pshu A.V. Fractional order equations in partial derivatives. — M.: Science, 2005. — 199 p.
2. Samko S., Kilbas A., Marichev O. Fractional order integrals and derivatives and their some applications. — Minsk: Science and Technique, 1987. — 688 p.
3. Kaliev I.A., Pervushina M.M. Some inverse problems for the heat conductivity equation, Information technologies and inverse problems of environmental management: Proceedings. — Khanty-Mansiysk: Polygraphist, 2005. — P. 39–43.
4. Kaliev I.A., Sabitova M.M. Problems about definition the temperature and density of the heat sources by the initial and final temperatures // Siberian journal of industrial mathematics. — 2009. — Vol. 12 (1). — P. 89–97.
5. Sadybekov M.A., Orazov I. Problems about definition the temperature and density of the heat sources by the initial and final temperatures at strongly regular boundary conditions // Mixed type equations and related problems of analysis and informatics: Proceedings of the second international Russian-Kazakh symposium. — Nalchik, 2011. — P. 168–170.
6. Berdyshhev A.S., Kadirkulov B.J., Turmetov B.K. About some inverse problems for fractional order heat conductivity Equations, Bulletin of KazNU. — Ser. Mathematics, mechanics and informatics. — 2010. — Vol. 2. — P. 36–42.
7. Naimark M.A. Linear differential operators. — M.: Science, 1954. — 528 p.
8. Levitan B.M., Sargsyan I.S. Sturm-Liouville and Dirac operators. — M.: Science, 1988. — 368 p.
9. Sedletsii A.M. Nonasymptotic properties of roots of Mittag-Leffler type functions // Mathematical notes. — 2004. — Vol. 75 (3). — P. 405–420.