5. Джамалов С.З. Нелокальные краевые и обратные задачи для уравнений смешанного типа.// *Монография. Ташкент.2021г, с.176.*
6. S.Z.Dzhamalov, R.R.Ashurov, Kh.Sh. Turakulov. The Linear Inverse Problem for the Three- Dimensional Tricomi Equation in a Prismatic Unbounded Domain. // *Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, 42(15), pp. 3606–3615. (Scopus)*
7. S.Z.Dzhamalov, M.G.Aliev, Kh.Sh. Turakulov. On a linear inverse problem for the three-dimensional Tricomi equation with nonlocal boundary conditions of periodic type in a prismatic unbounded domain. // *Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Math. 2022, (42)(1), pp.1-12. (Scopus)*

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТИПА БУССИНЕСКА В УСЕЧЕННОМ КОНУСЕ

Дженалиев М. Т.[1], Касымбекова А.С.[2], Қалибекова А.Қ.[1]
[1]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[2]*Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан*
E-mail: muvasharkhan@gmail.com, kasar1337@gmail.com, kalibekova.aidana2014@gmail.com

Теория уравнений Буссинеска и его модификаций всегда привлекает внимание математиков. Уравнение Буссинеска, а также их модификации занимают важное место при описании движения жидкости и газа, в том числе, в теории нестационарной фильтрации в пористых средах [1]–[7]. В последние годы граничные задачи для этих уравнений активно исследуются [8]–[14].

В работе изучается начально-граничная задача для двумерного уравнения типа Буссинеска в области, представляющей собой конус. Для применения методов, связанных с теорией монотонных операторов, конус преобразовывается в цилиндрическую область. Однако при этом оператор задачи теряет свойство монотонности. Комбинируя методы теории монотонных операторов и априорных оценок, в соболевских классах устанавливаются теорема об однозначной слабой разрешимости изучаемой начально-граничной задачи, а также теорема о повышении гладкости слабого решения.

Постановка начально-граничной задачи и основной результат.

Пусть $x=\{x_1,x_2\}$ и $Q_{xt}=\left\{x,t\colon\ |x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}<\varphi(t),\ 0<t_0<t<T<\infty\right\}$- криволинейный усеченный конус, где $\varphi(t_0)>0,\ \varphi'(t)\geq 0$. $\Omega_t=\{|x|<\varphi(t)\}$ -сечение области Q_{xt} для фиксированного $t\in(t_0,T)$. $\Sigma_{x,t}=\partial\Omega_t\times(t_0,T)$ -боковая поверхность конуса, где $\partial\Omega_t$ - граница области Ω_t. В области, представляющей собой криволинейный конус, рассматривается начально-граничная задача для уравнения типа Буссинеска

$$\partial_t u-\sum_{i=1}^{2}\partial_{x_i}\left(|u|\partial_{x_i}u\right)=f\,,\quad \{x,t\}\in Q_{xt}\,, \tag{1}$$

с граничными

$$u=0,\quad \{x,t\}\in\Sigma_{xt}=\partial\Omega_t\times(t_0,T), \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u=u_0\,,\quad x\in\Omega_{t_0}=\{|x|<\ t_0\}, \tag{3}$$

где $f(x,t), u_0(x)$– заданные функции.

Установлены следующие теоремы.

Теорема 1 (Основной результат). Пусть

$$f\in L_{3/2}\left((t_0,T);W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)\right),\qquad u_0\in H^{-1}\left(\Omega_{t_0}\right).$$

Тогда начально-граничная задача (1)–(3) имеет единственное решение

$$u\in L_3((t_0,T);L_3(\Omega_t))\cap L_\infty((t_0,T);H^{-1}(\Omega_t)).$$

Теорема 2 (О гладкости). Пусть

$$f \in L_{3/2}\Big((t_0,T);\ L_{3/2}(\Omega_t)\Big), \qquad u_0 \in L_2(\Omega_{t_0}).$$

Тогда начально-граничная задача (1)–(3) имеет единственное решение

$$u \in L_\infty((t_0,T);\ L_2(\Omega_t)),$$

$$|u|^{1/2}u \ \in L_2\big((t_0,T); H_0^1(\Omega_t)\big),$$
$$\partial_t u \in L_{3/2}\Big((t_0,T);\ W_{3/2}^{-1}(\Omega_t)\Big).$$

Для доказательства Теорем 1,2 рассматривается вспомогательная начально-граничная задача. Для этой цели от переменных $\{x,t\}$ перейдем к переменным $\{y,t\}$ по формулам $x_i = y_i \cdot \varphi(t),\ t = t$ и преобразуем криволинейный конус Q_{xt} в цилиндрическую область $Q_{yt} = \Omega \times (t_0,T),\ \Omega = \{0 \le |y| < 1\}$, где $\Sigma_{yt} = \partial\Omega \times (t_0,T)$. Это преобразование является взаимно-однозначным. Введем обозначения $u(x_i,t) = u(y_i \cdot \varphi(t),t) = w(y_i,t) = w\left(\frac{x_i}{\varphi(t)}\ ,t\right), w_0(y) = u_0(y\cdot\varphi(t_0),t_0)$ и $g(y,t) = f(y\cdot\varphi(t),t)$.

Вспомогательная начально-граничная задача для задачи (1)–(3) записывается в следующем виде:

$$\partial_t w - \sum_{i=1}^{2}\frac{1}{[\varphi(t)]^2}\partial_{y_i}\left(|u|\partial_{y_i}u\right) - \sum_{i=1}^{2} y_i\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\partial_{y_i}w = g(y,t)\ ,\ \ \{y,t\}\in Q_{yt}\ ,$$

$$w = 0, \qquad \{y,t\} \in \Sigma_{yt}\ ,$$
$$w = w_0, \qquad y \in \Omega,$$

где $g \in L_{3/2}((0,T); W_{3/2}^{-1}(\Omega)),\ w_0 \in H^{-1}(\Omega)$.

Список использованной литературы

1. H. P. McKean, Boussinesq's Equation on the Circle // Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol. XXXIV, (1981), 599–691.
2. Z. Y. Yan, F.D. Xie, H.Q. Zhang, Symmetry Reductions, Integrability and Solitary Wave Solutions to Higher-Order Modified Boussinesq Equations with Damping Term // Communications in Theoretical Physics, Vol. 36, No.1 (2001), 1–6.
3. J. L. Vazquez, The Porous Medium Equation. Mathematical Theory, Oxford University Press, Oxford (2007) XXII+625p.
4. П. Я. Полубаринова-Кочина, Об одном нелинейном дифференциальном уравнении, встречающемся в теории инфильтрации // Доклю Акад. Наук СССР, 63(6) (1948), 623–627.
5. P.Ya. Polubarinova-Kochina, Theory of Groundwater Movement, Princeton Univ. Press, Princeton (1962).
6. Ya. B. Zel'dovich and A. S. Kompaneets, Towards a theory of heat conduction with thermal conductivity depending on the temperature // In Collection of Papers Dedicated to 70th Anniversary of A. F. Ioffe. Izd. Akad. Nauk SSSR, Moscow (1950), 61–72.
7. Ya. B. Zel'dovich and G. I. Barenblatt, On the dipole-type solution in the problems of a polytropic gas flow in porous medium // Appl. Math. Mech., 21(5) (1957), 718–720.
8. X. Zhong, Strong solutions to the nonhomogeneous Boussinesq equations for magnetohydrodynamics convection without thermal diffusion // Electronic Journal of Qualitative Theory Differential Equations, No.24 (2020), 1–23.
9. H. Zhang, Q. Hu, G. Liu, Global existence, asymptotic stability and blow-up of solutions for the generalized Boussinesq equation with nonlinear boundary condition // Mathematische Nachrichten, 293: 2 (2020), 386–404.
10. G. Oruc, G. M. Muslu, Existence and uniqueness of solutions to initial boundary value problem for the higher order Boussinesq equation // Nonlinear Analysis – Real World Applications, 47 (2019), 436–445.
11. W. Ding, Zh.-A. Wang, Global existence and asymptotic behavier of the Boussinesq-Burgers system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 424: 1 (2015), 584–597.
12. N. Zhu, Zh. Liu, K. Zhao, On the Boussinesq-Burgers equations driven by dynamic boundary conditions // Journal of Differential Equations, 264: 3 (2018), 2287–2309.

13. J.-L. Lions, E. Magenes, Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. V. 1, Springer Verlag, Berlin (1972).
14. M.T. Jenaliyev , A.S. Kassymbekova , M.G. Yergaliyev , A.A. Assetov, An initial boundary value problem for the Boussinesq equation in a Trapezoid // Bulletin of the Karaganda University, №2(106) 2022.

ОБ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ И СВЯЗАННОЙ С НЕЙ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Дженалиев М.Т., Ергалиев М.Г.

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

E-mail: muvasharkhan@gmail.com, ergaliev@math.kz

В области $Q_{xt} = \{x, t|\ 0 < x < t, t_0 < t < T < \infty, t_0 > 0\}$, где $\Omega_t = \{0 < x < t, t_0 > 0\}$сечение области Q_{xt} для фиксированного значения временной переменной $t \in (t_0, T)$, исследуется коэффициентная обратная задача для уравнения Бюргерса: найти пару функций $\{u(x,t), \lambda(t)\}$из условий

$$\partial_t u + u\partial_x u - \nu\partial_x^2 u = \lambda(t) f(x), \quad (x,t) \in Q_{xt}, \tag{1}$$

$$\partial_x^j u(0,t) = \partial_x^j u(t,t), \quad j = 0,1, \quad t \in (t_0, T), \tag{2}$$

$$u(x, t_0) = 0, \quad x \in (0, t_0), \tag{3}$$

$$\int_0^t u(x,t)dx = E(t), \quad t \in [t_0, T], \tag{4}$$

где заданная постоянная ν и функции $f(x), E(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} \nu = const > 0, \ \ f(x) \in L^2(0,t), \ \ \bar{f}(t) \equiv \int_0^t f(x)dx \neq 0, \ \ \forall t \in [t_0, T], \\ E(t) \in W^{1,\infty}(t_0, T). \end{cases} \tag{5}$$

Отметим, что из (5) следует: $\bar{f}(t) \in L^\infty(t_0, T)$.

Теорема. Пусть выполнены условия (5). Тогда обратная задача (1) –(4) имеет единственное решение

$$u \in H_{per}^{2,1}(Q_{xt}) \equiv \left\{L^2\left(t_0, T; H_{per}^2(0,t)\right) \cap H^1\left(t_0, T; L^2(0,t)\right)\right\}, \lambda(t) \in L^\infty(t_0, T).$$

Список использованной литературы

1. Apraiz J., Doubova A., Fernandez-Cara E., Yamamoto M. Some inverse problems for the Burgers equation and related systems. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. 2022;107:106113.
2. Montoya C. Inverse source problems for the Korteweg-de Vries-Burgers equation with mixed boundary conditions. J. Inverse Ill-Posed Probl. 2019;27:1-18.
3. Baglan I., Kanca F. Two-dimensional inverse quasilinear parabolic problem with periodic boundary condition. Appl. Anal. 2019;98:1549-1565.
4. Kamynin V.L. The inverse problem of determining the lower-order coefficient in parabolic equations with integral observation. Math. Notes. 2013;94:205-213.
5. Jenaliyev M., Ramazanov M., Yergaliyev M. On the coefficient inverse problem of heat conduction in a degenerating domain. Appl. Anal. 2020;99:1026-1041.