МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОГО РАСПЛАВА

Кажикенова С.Ш.
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: sauleshka555@mail.ru

В ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей S рассмотрим следующую систему нелинейных стационарных уравнений, представляющих математическую модель движения несжимаемого металлического расплава:

$$(\rho\upsilon \cdot \nabla)\upsilon = \mu\Delta\upsilon - \nabla p + \lambda(\nabla\rho \cdot \nabla)\upsilon + \lambda(\upsilon \cdot \nabla)\nabla\rho - \lambda^2 div\left(\left(\frac{1}{\rho} \cdot \nabla\rho \cdot \nabla\right)\rho\right) + \rho f, \tag{1}$$

$$(\upsilon \cdot \nabla)\rho = \lambda\Delta\rho, \tag{2}$$

$$div\upsilon = 0, \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\upsilon|_S = 0, \rho|_S = \rho_S(x), \tag{4}$$

где $\upsilon(x) = \upsilon(x_1, x_2, x_3) -$ вектор-функция скоростей, $\rho(x) = \rho(x_1, x_2, x_3) -$ поле плотностей, $p(x) = p(x_1, x_2, x_3) -$ поле давления расплава, $f(x) = f(x_1, x_2, x_3) -$ вектор массовых сил, $\lambda, \mu -$ коэффициенты диффузии и вязкости, $\lambda > 0$, $\mu > 0$, $S = \partial\Omega -$ достаточно гладкая граница области Ω.

Известно, что система уравнений (1) – (3) неэволюционная и поэтому прямое применение численных методов затруднительно. Для разрешения этой трудности мы будем рассматривать другую модель неоднородного расплава, являющуюся аппроксимацией исходной модели (1) – (3) с малым параметром ε $(\varepsilon > 0)$. Итак, рассмотрим следующую задачу:

$$(\rho^\varepsilon\upsilon^\varepsilon \cdot \nabla)\upsilon^\varepsilon = \mu\Delta\upsilon^\varepsilon - \nabla p^\varepsilon + \lambda(\nabla\rho^\varepsilon \cdot \nabla)\upsilon^\varepsilon + \lambda(\upsilon^\varepsilon \cdot \nabla)\nabla\rho^\varepsilon -$$

$$- \lambda^2 div\left(\left(\frac{1}{\rho^\varepsilon} \cdot \nabla\rho^\varepsilon \cdot \nabla\right)\rho^\varepsilon\right) + \rho^\varepsilon f - \frac{1}{2}\rho^\varepsilon\upsilon^\varepsilon div\upsilon^\varepsilon, \tag{5}$$

$$(\upsilon^\varepsilon \cdot \nabla)\rho^\varepsilon = \lambda\Delta\rho^\varepsilon, \tag{6}$$

$$\varepsilon p^\varepsilon + div\upsilon^\varepsilon = 0, \tag{7}$$

с граничными условиями:

$$\upsilon^\varepsilon|_S = 0, \rho^\varepsilon|_S = \rho_S(x), \tag{8}$$

Теорема 1. Если $f \in L_{\frac{6}{5}}(\Omega), \rho_S \in W_2^{3/2}(S)$, то при $\lambda \le \alpha = \min\left\{\frac{M}{16}\frac{m^2}{C_1 m^2 + C_2 M^2}, \frac{\mu}{M - m}\right\}$, достаточно малом λ, существует хотя бы одно сильно-обобщенное решение задачи (5) –(7), где C_1, C_2 - константы, зависящие только от данных задачи и не зависящие от функций $\upsilon^\varepsilon, \rho^\varepsilon, p^\varepsilon$.

Доказательство теоремы строится из трех этапов: получение априорных оценок, использование метода Галеркина и предельный переход.

Сформулируем основной результат.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, тогда сильно-обобщенное решение задачи (1) – (4) при $\varepsilon \to 0$ сходится к сильно-обобщенному решению задачи (5) – (8).

Список использованных источников

1. *Смагулов Ш.С., Байтуленов Ж.Б.* Корректность одной диффузионной стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Труды международной конференции «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы: Казахстан в третьем тысячелетии». – Алматы, 2000. – С. 185-189.

2. *Антонцев С. Н., Кажихов А. В., Монахов В. Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. – Новосибирск: Наука, 1983. – 318 с.

3. *Кажикенова С.Ш.* Аппроксимация стационарной модели неоднородной несжимаемой жидкости // Вестник Кузбасского государственного технического университета. – Кемерово, 2010. -№ 6. – С.113-116.