УДК 51:338.26

Р.С.Каренов

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: 22Gulim1988@mail.ru)

Методика решения экономических и управленческих задач с помощью математической теории игр

В статье отмечено, что для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями создан научно обоснованный метод, который носит название «теория игр». Подчеркнуто, что в настоящее время ведется большая работа, направленная на расширение сферы применения теории игр. Обоснован вывод о том, что различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе. Рассмотрены методические основы использования теории игр для выбора оптимальных решений на промышленных предприятиях. Раскрыты методические принципы применения теории игр при решении экономических задач в сельском хозяйстве. Предложен методический подход для использования математического аппарата теории игр при анализе деятельности торговых предприятий. Определено, что задача теории игр в принципе может быть сведена к решению задачи линейного программирования.

Ключевые слова: теория игр, стратегия, конфликтная ситуация, задача, цена игры, матрица, выигрыш, природа, критерий, решение.

Понятие об игровых моделях

На практике часто приходится сталкиваться с задачами, в которых необходимо принимать решения в условиях неопределенности, т.е. возникают ситуации, в которых две (или более) стороны преследуют различные цели, а результаты любого действия каждой из сторон зависят от мероприятий партнера. Такие ситуации, возникающие при игре в шахматы, шашки, домино и т.д., относятся к конфликтным: результат каждого хода игрока зависит от ответного хода противника, цель игры — выигрыш одного из партнеров. В экономике конфликтные ситуации встречаются очень часто и имеют многообразный характер. К ним относятся, например, взаимоотношения между поставщиком и потребителем, покупателем и продавцом, банком и клиентом. Во всех этих примерах конфликтная ситуация порождается различием интересов партнеров и стремлением каждого из них принимать оптимальные решения, которые реализуют поставленные цели в наибольшей степени. При этом каждому приходится считаться не только со своими целями, но и с целями партнера, учитывать не известные заранее решения, которые эти партнеры будут принимать.

Для грамотного решения задач с конфликтными ситуациями необходимы научно обоснованные методы. Такие методы разработаны математической теорией конфликтных ситуаций, которая носит название «теория игр» [1–3].

Как правило, примерами игр являются обычные игры: салонные, спортивные, карточные и др. Именно с анализа подобных игр начиналась математическая теория игр; они и по сей день служат прекрасным материалом для иллюстрации положений и выводов этой теории.

В итоге всякая претендующая на адекватность математическая модель социально-экономического явления должна отражать присущие ему черты конфликта, т.е. описывать:

а) множество заинтересованных сторон (мы будем называть их игроками; в литературе по теории игр они именуются также субъектами, лицами, сторонами, участниками). В случае, если число игроков конечно, они различаются по своим номерам (1-й игрок и 2-й игрок в игре в орлянку или в случае дуополии) или по присваиваемым им именам (например, Продавец и Покупатель в ситуации монополия-монопсония);

б) возможные действия каждой из сторон, именуемые также стратегиями или ходами. Выбор и осуществление одного из предусмотренных правилами действий называется ходом игрока. Ходы могут быть личными и случайными. Личный ход — это сознательный выбор игроком одного из возможных действий (например, ход в шахматной игре), случайный — случайно выбранное действие (например, выбор карты из перетасованной колоды). Стратегией игрока называется совокупность правил, определяющих выбор его действия при каждом личном ходе, в зависимости от сложившейся ситуации. Обычно в процессе игры при каждом личном ходе игрок делает выбор в зависимости от конкретной ситуации. Однако в принципе возможно, что все решения приняты игроком заранее (в ответ на любую сложившуюся ситуацию). Это означает, что игрок выбрал определенную стратегию, которая может быть задана в виде списка правил или программы;

в) интересы сторон, представленные функциями выигрыша (платежа) для каждого из игроков.

В теории игр предполагается, что функции выигрыша и множество стратегий, доступных каждому из игроков, общеизвестны, т.е. каждый игрок знает свою функцию выигрыша и набор имеющихся в его распоряжении стратегий, а также функции выигрыша и стратегии всех остальных игроков, и в соответствии с этой информацией организует свое поведение.

Формализация содержательного описания конфликта представляет собой его математическую модель, которую называют игрой.

Для того чтобы решить игру или найти решение игры, для каждого игрока следует выбрать стратегию, которая удовлетворяет условию оптимальности, т.е. один из игроков должен получать максимальный выигрыш, когда второй придерживается своей стратегии. В то же время второй игрок должен иметь минимальный проигрыш, если первый придерживается своей стратегии. Такие стратегии называются оптимальными. Оптимальные стратегии должны также удовлетворять условию устойчивости, т.е. любому из игроков должно быть невыгодно отказаться от своей стратегии в этой игре.

Если игра повторяется достаточно много раз, то игроков может интересовать не выигрыш и проигрыш в каждой конкретной партии, а средний выигрыш (проигрыш) во всех партиях.

Возможные варианты (исходы) игры сводятся в прямоугольную таблицу — платежную матрицу (табл. 1), в которой строки соответствуют различным стратегиям игрока A, столбцы — стратегиям игрока B, q_{ij} называется ценой игры.

Таблица 1

Общий вид платежной матрицы

Игрок	B_1	B_2	...	B_n
A_1	q_{11}	q_{12}	...	q_{1n}
A_2	q_{21}	q_{22}	...	q_{2n}
...	...		...	...
A_m	q_{m1}	q_{m2}	...	q_{mn}

Целью теории игр является определение оптимальной стратегии для каждого игрока. При выборе оптимальной стратегии естественно предполагать, что оба игрока ведут себя разумно с точки зрения своих интересов. Важнейшее ограничение теории игр — единственность выигрыша как показателя эффективности, в то время как в большинстве реальных экономических задач имеется более одного показателя эффективности.

Теория игр впервые была систематически изложена Дж. фон Нейманом и О.Моргенштерном в 1944 г., хотя отдельные результаты были опубликованы еще в 20-х гг. Нейман и Моргенштерн написали оригинальную книгу, которая содержит главным образом экономические примеры, поскольку экономическому конфликту легче всего придать численную форму [4].

Во время Второй мировой войны и сразу после нее теорией игр серьезно заинтересовались военные, которые увидели в ней аппарат для исследования стратегических решений. Затем главное внимание снова стало уделяться экономическим проблемам. Сейчас ведется большая работа, направленная на расширение сферы применения теории игр.

Классификация игр

Различные виды игр можно классифицировать, основываясь на том или ином принципе: по числу игроков, по числу стратегий, по свойствам функций выигрыша, по возможности предварительных переговоров и взаимодействия между игроками в ходе игры [5–7].

В зависимости от числа игроков различают игры с двумя, тремя и более участниками. Весь материал, представленный в теории оптимизации, можно рассматривать как теорию игр с одним игроком. В принципе возможны также игры с бесконечным числом игроков.

Согласно другому принципу классификации — по количеству стратегий — различают конечные и бесконечные игры. В конечных играх игроки располагают конечным числом возможных стратегий (например, в игре в орлянку игроки имеют по два возможных хода — они могут выбрать «орел» или «решку»). Сами стратегии в конечных играх нередко называются чистыми стратегиями. Соответственно, в бесконечных играх игроки имеют бесконечное число возможных стратегий. Так, в ситуации Продавец–Покупатель каждый из игроков может назвать любую устраивающую его цену и количество продаваемого (покупаемого) товара.

Третий способ классификации игр — по свойствам функций выигрыша (платежных функций). Важным случаем в теории игр является ситуация, когда выигрыш одного из игроков равен проигрышу другого, т.е. налицо прямой конфликт между игроками. Подобные игры называются играми с нулевой суммой, или антагонистическими играми. Игры в орлянку или в очко — типичные примеры антагонистических игр. Прямой противоположностью играм такого типа являются игры с постоянной разностью, в которых игроки и выигрывают, и проигрывают одновременно, так что им выгодно действовать сообща. Между этими крайними случаями имеется множество игр с ненулевой суммой, где имеются и конфликты, и согласованные действия игроков.

В зависимости от возможности предварительных переговоров между игроками различают кооперативные и некооперативные игры. Игра называется кооперативной, если до начала игры игроки образуют коалиции и принимают взаимообязывающие соглашения о своих стратегиях. Игра, в которой игроки не могут координировать свои стратегии подобным образом, называется некооперативной. Очевидно, что все антагонистические игры могут служить примером некооперативных игр. Примером кооперативной игры может служить ситуация образования коалиций в парламенте для принятия путем голосования решения, так или иначе затрагивающего интересы участников голосования.

Задача о конструкторе, разрабатывающем новое изделие

Пусть конструктор получил задание разработать определенное новое изделие. В результате исследований он определил три возможных варианта изделия — V_1, V_2, V_3, каждый из которых может быть реализован каким-либо из трех техпроцессов — T_1, T_2, T_3.

Если первый вариант конструкции V_1 реализуется по первой технологии T_1, то внешний вид изделия оказывается наилучшим и оценивается экспертами в 9 баллов, при реализации по второй технологии — в 6 баллов, по третьей — в 5 баллов и т.д. (табл. 2).

Таблица 2

Платежная матрица, связанная с решением задачи о конструкторе, разрабатывающем новое изделие

Конструкция	Технология			$\alpha_i = \min_j q_{ij}$
	T_1	T_2	T_3	
V_1	9	6	5	$5\ (T_3)$
V_2	8	7	7	$7\ (T_2$ или $T_3)$
V_3	7	5	8	$5\ (T_2)$
$\beta_j = \max_i q_{ij}$	9	7	8	$\max_i \min_j q_{ij} = 7 = \min_j \max_i q_{ij}$

Решение данной задачи сведется к следующему.

Конфликтная ситуация возникает из-за того, что затраты на реализацию каждого конструкторско-технологического решения (варианта) неодинаковы. Для простоты полагаем, что затраты пропорциональны внешнему виду (чем выше балл, тем больше затраты).

Конструктор должен представить только один вариант, конечно, самый красивый. Но он понимает, что тогда найдутся сторонники самого дешевого варианта. Поэтому его задача выбрать оптимальный вариант по внешнему виду и стоимости.

Если конструктор выберет V_1, то экономисты будут настаивать на технологии T_3. На вариант V_2 будет ответ T_2 или T_3 и т.д.

Очевидно, что с точки зрения конструктора преимущество имеет вариант V_2, так как даже при неблагоприятных обстоятельствах получится изделие, оцениваемое в 7 баллов (выигрыш 7), может быть, даже 8, если удается уговорить экономистов на вариант T_1.

С точки зрения экономистов, в смысле снижения затрат: при выборе технологии T_1 в варианте V_1 затраты наибольшие — 9 баллов, при T_2 в V_2 — 7 баллов, при T_3 в V_3 — 8, т.е. для экономистов оптимальным является техпроцесс T_2, так как он требует меньших затрат при различных вариантах конструкции. Следовательно, стратегия $T_2 V_2$ с выигрышем 7 — наиболее выгодная сразу для обеих сторон — максимальный выигрыш V совпадает с минимальным проигрышем Т.

Однако не все матрицы имеют седловую точку. Тогда решение находят, применяя смешанные стратегии, т.е. чередуя случайным образом несколько чистых стратегий (гибкая тактика).

Задача двух осужденных

Обычно смешанную стратегию первого игрока обозначают как вектор $U = (u_1,\ u_2,\ ...,\ u_m)$, а второго — как вектор $Z = (z_1,\ z_2,\ ...,\ z_m)$, где $u_i \geq 0 (i = 1,\ ...,\ m)$, $z_j \geq 0\ (j = 1,\ ...,\ n)$, $\sum_{i=1}^{m} u_i = \sum_{j=1}^{n} z_j = 1$.

Если u^0 — оптимальная стратегия первого игрока, z^0 — оптимальная стратегия второго игрока, то число $\upsilon = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 z_j^0$ называют ценой игры.

Для того чтобы число υ было ценой игры, а u^0 и z^0 — оптимальными стратегиями, необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 \geq \upsilon\ \ (j = 1,\ ...,\ n);$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j^0 \leq \upsilon\ \ (i = 1,\ ...,\ m).$$

Если один из игроков применяет оптимальную смешанную стратегию, то его выигрыш равен цене игры υ, вне зависимости от того, с какими частотами будет применять второй игрок стратегии, вошедшие в оптимальную, в том числе и чистые стратегии.

Рассмотрим иллюстративную задачу о двух осужденных (обозначим их через $А$ и $Б$), которым необходимо принять независимое решение о взаимодействии со следствием. Каждый из них знает условия:

	$Б$ сознается	$Б$ не сознается
$А$ сознается	Каждому по 8 лет осуждения	$А$ — 2 года $Б$ — 10 лет
$А$ не сознается	$Б$ — 2 года $А$ — 10 лет	Каждому по 5 лет

Если один из осужденных сознается, а другой нет, то первый получает 2 года осуждения, а второй — 10 лет. Если сознаются оба, то осуждение — по 8 лет каждому. Конечно, осужденные заинтересованы в уменьшении своего срока наказания. Если использовать критерий «минимум наказания» в худшем варианте действия напарника, то оба осужденных должны выбирать «отказ» и получить наказание в размере 5 лет.

«Игры с природой»

В случае, когда между сторонами (участниками) отсутствует «антагонизм» (например, в процессе работы предприятий и торговых посредников), такие ситуации называют «играми с природой» [8, 9].

Здесь первая сторона принимает решение, а вторая — «природа» — не оказывает первой стороне сознательного, агрессивного противодействия, но ее реальное поведение неизвестно.

Пусть предприятие имеет *m* стратегий: $T_1,\ T_2\ ...,\ T_m$; имеется *n* возможных состояний природы: $П_1,\ П_2\ ...,\ П_n$. Так как «природа» не является заинтересованной стороной, исход любого сочетания поведения сторон можно оценить выигрышем b_{ij} первой стороны для каждой пары стратегий T_i и $П_j$. Все показатели игры заданы платежной матрицей $\{b_{ij}\}_{mxn}$.

По платежной матрице можно принять ряд решений. Например, оценить возможные исходы: минимальный выигрыш $B_i^{\min} = \min_j B_{ij}$, т.е. наименьшая из величин в каждой *i*-й строке как пессимистическая оценка; максимальный выигрыш — то наилучшее, что дает выбор *i*-го варианта:

$$B_i^{\max} = \max_j B_{ij}.$$

Использование теории игр для выбора оптимальных решений на промышленных предприятиях

Природные условия нередко сказываются на эффективности работы промышленных предприятий.

На промышленных предприятиях теория игр может использоваться для выбора оптимальных решений, например, при создании рациональных запасов сырья, материалов, полуфабрикатов, в вопросах качества продукции и других экономических ситуациях. В первом случае противоборствуют две тенденции: увеличения запасов, в том числе и страховых, гарантирующих бесперебойную работу производства; сокращения запасов, обеспечивающих минимизацию затрат на их хранение; во втором — стремления к выпуску большего количества продукции, ведущего к снижению трудовых затрат; к повышению качества, сопровождающемуся часто уменьшением количества изделий и, следовательно, возрастанием трудовых затрат. В машиностроительном производстве противоборствующими направлениями являются стремление к максимальной экономии металла в конструкциях, с одной стороны, и обеспечение необходимой прочности конструкций — с другой.

Нами в качестве примера рассмотрена работа швейной фабрики, выпускающей детские платья и костюмы, сбыт которых зависит от состояния погоды (предприятие реализует свою продукцию через фирменный магазин).

Затраты фабрики в течение апреля–мая 2012 г. на единицу продукции составили: платья — 8 денежных единиц, костюмы — 27, а цена реализации равняется соответственно 16 и 48. По данным наблюдений за прошлое время, фабрика может реализовать в течение этих месяцев в условиях теплой погоды 600 костюмов и 1975 платьев, а при прохладной погоде — 625 платьев и 1000 костюмов.

Задача заключается в максимизации средней величины дохода от реализации выпущенной продукции, учитывая капризы погоды. Фабрика располагает в этих ситуациях двумя следующими стратегиями: в расчете на теплую погоду (стратегия A); в расчете на холодную погоду (стратегия B).

Если предприятие примет стратегию A, т.е. продукция, соответствующая теплой погоде (стратегия природы C), будет полностью реализована, то доход фабрики в этой ситуации составит:

$$600(48-27)+1975(16-8)=28400.$$

Если продажа осуществляется в условиях прохладной погоды (стратегия природы $Д$), то костюмы будут проданы полностью, а платья только в количестве 625 шт. Доход предприятия в данном случае составит:

$$600(48-27)+625(16-8)-(1975-625)\cdot 8=6800.$$

Аналогично определим доход предприятия в случае применения им стратегии B. Для условий теплой погоды доход фабрики определится в сумме

$$600(48-27)+625(16-8)-(1000-600)\cdot 27=6800.$$

Применение той же стратегии, но в условиях холодной погоды приведет к другим результатам:

$$1000(48-27)+625(16-8)=26000.$$

Рассматривая предприятие (P_1) и природу (P_2) в качестве двух игроков, получим так называемую платежную матрицу следующего вида (табл. 3).

Таблица 3

Платежная матрица для решения задачи, в которой промышленное предприятие и природа рассматриваются в качестве двух игроков

Игроки	P_2 (природа)			
	Стратегии	Стратегия C	Стратегия $Д$	min по строкам
P_1 (предприятие)	Стратегия A	28400	6800	6800
	Стратегия B	6800	26000	6800
	max по столбцам	28400	26000	

Из платежной матрицы видно, что игрок P_1 (предприятие) никогда не получит дохода меньше 6800. Но если погодные условия совпадут с выбранной стратегией, то выручка (выигрыш) предприятия будет составлять 26000 или 28400. Если игрок P_1 будет постоянно применять стратегию A_1, а игрок P_2 — стратегию $Д$, то выигрыш снизится до 6800. То же самое произойдет, если игрок P_1 будет постоянно применять стратегию B, а игрок P_2 — стратегию C.

Отсюда вывод: наибольший доход предприятие обеспечит, если будет попеременно применять то стратегию A, то стратегию B. Такая стратегия называется смешанной, а ее элементы (A и B) — чистыми стратегиями.

Оптимизация смешанной стратегии позволит игроку P_1 всегда получать среднее значение выигрыша, независимо от стратегии игрока P_2. Для иллюстрации этого продолжим начатый пример.

Обозначим частоту применения игроком P_1 стратегии A через x, тогда частота применения им стратегии B будет равна $(1-x)$.

Если игрок P_1 применяет оптимальную смешанную стратегию, то и при стратегии C (теплая погода), и при стратегии $Д$ (холодная погода) игрока P_2 он должен получить одинаковый средний доход:

$$28400\text{x} + 6800(1\text{-x}) = 6800x + 26000(1-x);$$

$$28400\text{x} - 6800x - 6800x + 26000x = 26000 - 6800;$$

$$40800\text{x} = 19200;$$

$$x = \frac{19200}{40800}; \quad x = \frac{8}{17}; \quad 1\text{-}x = \frac{9}{17}.$$

Действительно, при стратегии C игрока P_2 средний доход предприятия составит:

$$28400 \cdot \frac{8}{17} + 6800 \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17}(227200 + 61200) = \frac{1}{17} \cdot 288400 \approx 16965;$$

при стратегии $Д$ игрока P_2 —

$$6800 \cdot \frac{8}{17} + 26000 \cdot \frac{9}{17} = \frac{1}{17}(54400 + 234000) = \frac{1}{17} \cdot 288400 \approx 16965.$$

Следовательно, игрок P_1, применяя чистые стратегии A и B в соотношении 8:9, будет иметь оптимальную смешанную стратегию, обеспечивающую ему в любом случае средний доход в сумме 16965, т.е. средний платеж, равный 16965 единицам.

Средний платеж, который получается при реализации оптимальной стратегии, называется ценой игры.

В заключение определим, какое количество платьев и костюмов предприятие должно выпускать для максимизации своего дохода: (600 костюмов + 1975 платьев)$\cdot\frac{8}{17}$ + (1000 костюмов + 625 платьев)$\cdot\frac{9}{17} = \frac{1}{17}$(4800 костюмов + 15800 платьев + 9000 костюмов + 5625 платьев) = $\frac{1}{17}$(13800 костюмов + 21425 платьев) = 812 костюмов + 1260 платьев.

Значит, оптимальная стратегия предприятия означает выпуск 812 костюмов и 1260 платьев; тогда при любой погоде оно получит средний доход в сумме 16965.

Применение теории игр при решении экономических задач в сельском хозяйстве

В сельском хозяйстве теория игр может применяться при решении экономических задач, в которых оппозиционной силой выступает природа, и когда вероятность наступления тех или иных событий многовариантна или неизвестна.

По данным фермерских хозяйств Карагандинской области, занимающихся выращиванием сахарной свеклы, нами сделана попытка показать, как математическая теория игр может быть использована в экономических расчетах для выбора наиболее целесообразной совокупности мероприятий для достижения оптимального решения на предприятиях АПК.

Как известно, руководство сельскохозяйственными предприятиями (1-й игрок) имеет в своем распоряжении набор факторов (совокупность агрономических мероприятий), влияющих на урожайность сахарной свеклы. Обозначим эти факторы через X_1, X_2, X_3, X_4. На урожайность сахарной свеклы влияют природно-экономические условия (2-й игрок). Выразим это влияние через Y_1, Y_2, Y_3, Y_4. Взаимодействие этих факторов отобразим через a_1, a_2, a_3, a_4. Платежная матрица показана в таблице 4.

Таблица 4

Платежная матрица для решения задачи выращивания сахарной свеклы с помощью теории игр

Факторы 1-го игрока	Факторы 2-го игрока			
	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	31	33	34	34
X_2	32	31	35	38
X_3	30	34	36	41
X_4	38	31	37	40

Задача — использовать набор имеющихся факторов (X_1, X_2, X_3, X_4) для обеспечения при всех условиях гарантированного урожая свеклы (цена игры). Элемент платежной матрицы, который является одновременно максимумом столбца и минимумом строки, называется точкой равновесия. Ее наличие упрощает решение задачи. Она показывает наилучшее значение игры. При отсутствии точки равновесия решение задачи усложняется.

Этапы решения задачи: 1. Производим проверку игры на точку равновесия. Для этого определяем: а) максимальные данные по всем столбцам — 38; 34; 37; 41; б) минимальное значение среди всех максимальных величин — 34; в) минимальное значение по всем строкам —31, 31, 30, 31; г) максимальное значение из всех минимальных — 31.

Игра не имеет точки равновесия. Достижение максимума игры требует смешанных стратегий.

2. Определяем доминирующие стратегии 1-го игрока. Они представляют строки, элементы которых больше или равны элементам других строк. В нашем примере третья стратегия в сочетании с четвертой доминируют над остальными, что видно из расчета:

$$30\cdot\frac{1}{2}+38\cdot\frac{1}{2}\ge 31,32;\quad 34\cdot\frac{1}{2}+31\cdot\frac{1}{2}\ge 31;$$

$$36\cdot\frac{1}{2}+37\cdot\frac{1}{2}\ge 35,34;\quad 41\cdot\frac{1}{2}+40\cdot\frac{1}{2}\ge 38,35.$$

Это дает право удалить из матрицы первую и вторую строки.

3. Находим доминирующие стратегии 2-го игрока в сокращенной матрице. Из ее анализа видно, что доминирующими являются четвертый, третий и первый столбцы. Следовательно, второй столбец можно удалить из платежной матрицы.

4. Составляем сокращенную платежную матрицу (табл. 5).

Таблица 5

Сокращенная платежная матрица для решаемой задачи

Факторы 1-го игрока	Факторы 2-го игрока		
	Y_1	Y_3	Y_4
X_3	30	36	41
X_4	38	37	40

5. По сокращенной матрице составляем систему неравенств (условий):

$$X_3 + X_4 = 1; \qquad Y_1 + Y_3 + Y_4 = 1;$$
$$30X_3 + 38X_4 \ge C; \qquad 30Y_1 + 36Y_3 + 41Y_4 \le C;$$
$$36X_3 + 37X_4 \ge C; \qquad 38Y_1 + 37Y_3 + 40Y_4 \le C.$$
$$41X_3 + 40X_4 \ge C;$$

6. Решается первая система неравенств:

$$X_3 = 1 - X_4;\ \ 30X_3 + 38X_4 = 36X_3 + 37X_4;$$
$$30(1\text{-}X_4) + 38X_4 = 36(1 - X_4) + 37X_4;$$
$$30 - 30X_4 + 38X_4 = 36 - 36X_4 + 37X_4;$$
$$30 + 8X_4 = 36 + X_4;\ \ 8\mathrm{X}_4 - X_4 = 36 - 30;$$
$$7X_4 = 6;\ \ X_4 = \frac{6}{7};\ \ X_3 = \frac{1}{7}.$$

Как видно, четвертая стратегия должна применяться в хозяйстве наиболее часто. Цена игры — 37,95 т/га.

7. Далее решается вторая система уравнений:

$$Y_1 = 1 - Y_3 - Y_4;\ 30Y_1 + 36Y_3 + 41Y_4 = 38Y_1 + 37Y_3 + 40Y_4;$$
$$30 - 30Y_3 - 30Y_4 + 36Y_3 + 41Y_4 = 38 - 38Y_3 - 38Y_1 + 37Y_3 + 40Y_4;$$
$$30 + 6Y_3 + 11Y_4 = 38 - Y_3 + 2Y_4;\ 6Y_3 + 11Y_4 + Y_3 - 2Y_4 = 38 - 30;$$
$$7Y_3 + 9Y_4 = 8;\ 7Y_3 = 8 - 9Y_4;\ 7(8 - 9Y_4) + 9Y_4 = 8;$$
$$56\text{-}63Y_4 + 9Y_4 = 8;\ 56 - 8 = 63Y_4 - 9Y_4;$$
$$48 = 54Y_4;\ Y_4 = \frac{48}{54} = 0{,}89;\ Y_3 = 0{,}001;\ Y_4 = 0{,}109.$$

Следовательно, на действии 1-го игрока с помощью четвертой стратегии с наибольшей силой может проявляться ответ по четвертой стратегии 2-го игрока. Возможны ответы и по первой стратегии. Основной игрок в своих действиях должен с этим считаться и разработать дополнительные меры, чтобы всегда иметь необходимый гарант.

Теория игр позволяет анализировать оценки оптимальных планов по использованию земли, трудовых ресурсов, техники, агрономических и зоотехнических мероприятий и др. Однако при изучении сложных явлений лучшие результаты обеспечивает симплексный способ решения задач.

Возможность использования теории игр при анализе деятельности торговых предприятий

При анализе «игры с природой» вводится показатель, по которому оценивают, насколько то или иное состояние «природы» влияет на исход ситуации. Этот показатель называют риском.

Риск r_{ij} при пользовании стратегией T_i и состоянием «природы» $П_{\mathrm{j}}$ оценивается разностью между максимально возможным выигрышем при данном состоянии «природы» $B_i^{\max}$ и выигрышем B_{ij} при выбранной стратегии T_i :

$$r_{ij} = B_i^{\max} - B_{ij}.$$

Исходя из этого определения можно оценить максимальный риск каждого решения:

$$r_{\mathrm{i}}^{\max} = \max_j r_{ij}.$$

Решения могут приниматься по результатам анализа ряда критериев.

1. Критерий, основанный на известных вероятностных состояниях «природы» (например, спроса, по данным анализа за прошлые годы):

– если известны вероятности состояний «природы»:

$$P_1 = P(\Pi_1);\ P_2 = P\left(\Pi_2\right);\ \ldots;\ P_n = P\left(\Pi_n\right),$$

полагая, что

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_j + \ldots + P_n = 1.$$

Тогда в качестве показателя эффективности (рациональности, обоснованности) стратегии T_i берется среднее (математическое ожидание) — выигрыш применения этой стратегии:

$$\overline{B}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} P_j ,$$

а оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель эффективности имеет максимальное значение, т.е. $\overline{B} = \max\limits_i \overline{B}_i$;

– если каждому решению T_i соответствует множество возможных результатов B_{ij} с вероятностями P_{ij}, то среднее значение выигрыша определится как

$$\overline{B}_i = \sum_{j=1}^{n} B_{ij} P_{ij} ,$$

а оптимальная стратегия выбирается по условию

$$\overline{B} = \max_i \overline{B}_i .$$

В этом случае можно воспользоваться и стратегией минимального среднего риска для каждого i -го состояния «природы»:

$$\overline{r} = \min_i \overline{r}_i = \min_i \sum_{j=1}^{n} r_{ij} P_{ij} .$$

2. Максиминный критерий Вальда. Здесь выбирается решение торговой организации, при котором гарантируется максимальный выигрыш в наихудших условиях внешней среды (состояния «природы»):

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min} .$$

3. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица. Здесь представляется логичным, чтобы при выборе решения вместо двух крайностей в оценке ситуации придерживаться некоторого компромисса, учитывающего возможность как наихудшего, так и наилучшего поведения «природы». В соответствии с этим компромиссным критерием для каждого решения будет линейная комбинация минимального и максимального выигрышей и выбирается тот, для которого эта величина окажется наибольшей:

$$G = \max_i \left[x \min_j B_{ij} + \left(1 - x\right) \max B_{ij} \right],$$

где x — показатель «пессимизма–оптимизма» (чаще всего 0,5).

4. Критерий минимаксного риска Сэвиджа. Здесь выбирают ту стратегию, при которой величина риска имеет минимальное значение в самой неблагоприятной ситуации: $S = \min\limits_i \max\limits_j r_{ij}$, чтобы избежать слишком большого риска при выборе решения.

Из анализа деятельности торговых предприятий известно, что спрос на товары формируется под воздействием различных факторов, в том числе моды, вкусов, предпочтений покупателей, природно-климатических условий. Эти факторы обусловливают сезонный спрос на товары, так как сильное влияние на него оказывает изменение факторов.

Влияние перечисленных выше факторов на изменение спроса особенно сказывается на товарах легкой промышленности (обувь, одежда, текстиль, галантерея и т.д.). Не проданные вовремя товары могут и в будущем не найти своих покупателей, что приведет к потерям, росту торговых издержек. В связи с этим торговые предприятия в конце сезона организуют расширенную распродажу сезонных товаров по сниженным ценам. Понятно, что решение о размере снижения цен при сезонной распродаже не может приниматься необдуманно. Прежде всего, должна учитываться предполагаемая реакция покупателей на снижение цен сезонных товаров, которая, как известно, измеряется эластичной зависимостью спроса от цены. На практике эластичная зависимость спроса от цены изучается применительно к основным потребительским товарам и товарным группам (например, мужская одежда). Эластичная зависимость спроса от цены на отдельные конкретные изделия (например, швейные, текстильные), продажа которых носит сезонный характер, неизвестна. В этой связи можно полагать, что сезонное снижение цен имеет характер игры торгового предприятия с природой.

Нами сделана попытка изучить деятельность конкретного торгового предприятия и рассмотреть игровую ситуацию при следующей платежной матрице (табл. 6).

Таблица 6

Платежная матрица для решения задачи, имеющей характер игры торгового предприятия с природой

Старые товары	Новые товары		
	$H_1(P)$	$H_2(P)$	$H_3(P)$
C_1	$9\ (0,6)$	$6\ (0,3)$	$4\ (0,6)$
C_2	$8\ (0,2)$	$3\ (0,7)$	$7\ (0,2)$
C_3	$5\ (0,1)$	$5\ (0,4)$	$8\ (0,5)$

Известна матрица условных вероятностей P_{ij} продажи старых товаров C_1, C_2, C_3 при наличии новых товаров H_1, H_2, H_3 (см. табл. 6). Необходимо определить наиболее выигрышную политику продаж.

Решение рассматриваемой задачи включает следующие этапы:

1. Минимальный выигрыш $B_i^{\min} = \min\limits_j B_{ij}$.

Минимальный выигрыш при продаже старых товаров:

- C_1 : $B_1^{\min} = \min\limits_{j=1,\dots,3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = \min\{9,\ 6,\ 4\} = 4 = B_{13}$;
- C_2 : $B_2^{\min} = \min\{8,\ 3,\ 7\} = 3 = B_{22}$;
- C_3 : $B_3^{\min} = \min\{5,\ 5,\ 8\} = 5 = B_{31}$,

где B_{13}, B_{22}, B_{31} образуют систему пессимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

2. Максимальный выигрыш при продаже старых товаров:

- C_1 : $B_1^{\max} = \max\limits_{j=1,\dots,3}\{B_{11}, B_{12}, B_{13}\} = 9 = B_{11}$;
- C_2 : $B_2^{\max} = \max\{B_{21}, B_{22}, B_{23}\} = 8 = B_{21}$;
- C_3 : $B_3^{\max} = \max\{5, 5, 8\} = 8 = B_{33}$,

где B_{11}, B_{21}, B_{33} образуют систему оптимистических оценок выигрыша от продаж старых товаров.

3. При анализе «игры с природой» вводится показатель влияния какого-либо состояния «природы» на исход продаж, т.е. показатель риска:

$$r_{ij} = B_i^{\max} - B_{ij},$$

каждый из которых составит матрицу рисков:

$$\begin{array}{cc} & H_1 H_2 H_3 \\ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Максимальное значение риска для каждого решения: $r_i^{\max} = \max\limits_j r_{ij}$, т.е. при продаже товаров:

- C_1 : $r_1^{\max} = \max\limits_{j=1,...,3}\{r_{11}, r_{12}, r_{13}\} = \max\{0,\ 3,\ 5\} = 5 = r_{13}$;
- C_2 : $r_2^{\max} = \max\{0,\ 5,\ 1\} = 5 = r_{22}$;
- C_3 : $r_3^{\max} = \max\{3,\ 3,\ 0\} = 3 = r_{31}$.

Решения о плане продаж принимаются исходя из анализа системы критериев.

4. Критерий по известным вероятностным состояниям «природы» P_{ij} : оптимальной считают стратегию, для которой этот показатель наибольший, т.е. $\overline{B} = \max\limits_i \overline{B}_i$, где $\overline{B}_i$ — математическое ожидание выигрыша при i -й стратегии:

$$\overline{B}_i = \sum_{j=1}^{3} B_{ij} P_{ij}.$$

Здесь B_{ij} — результат (выигрыш при применении ij -й стратегии):

$$\overline{B}_1 = 9\cdot 0,6 + 6\cdot 0,3 + 4\cdot 0,1 = 7,6;\ \ \overline{B}_2 = 8\cdot 0,2 + 3\cdot 0,7 + 7\cdot 0,1 = 4,4;$$
$$\overline{B}_3 = 5\cdot 0,1 + 5\cdot 0,4 + 8\cdot 0,5 = 6,5.$$

Тогда $\overline{B} = \max\limits_i\{B_i\} = \max\{7,6;\ 4,4;\ 6,5\} = 7,6 = \overline{B}_1$, т.е. оптимальной стратегией по этому критерию будет продажа изделия C_1.

5. Максиминный критерий Вальда:

$$W = \max_i \min_j B_{ij} = \max_i B_i^{\min};$$
$$W = \max_i\left\{B_1^{\min}, B_2^{\min}, B_3^{\min}\right\} = \max\{6,\ 3,\ 5\} = 6 = B_1^{\min},$$

т.е. при продаже изделия C_1 гарантируется выигрыш даже в наихудших условиях.

6. Критерий пессимизма–оптимизма Гурвица:

$$G = \max_i\left[xB_i^{\min} + (1-x)B_i^{\max}\right],$$

где x — доля оптимизма–пессимизма (0,5);

$$G = \max_i\left[0,5\{6,\ 3,\ 5\} + 0,5\{9,\ 8,\ 8\}\right] = \max\left\{(3+4,5);\ (1,5+4);\ (2,5+4)\right\} = \max\{7,5;\ 5,5;\ 6,5\} = 7,5,$$

т.е. исходя из уравновешенной точки зрения принимается решение о продажах C_1.

7. Критерий минимаксного риска Сэвиджа; решение принимают с минимальным значением риска в самой неблагоприятной ситуации:

$$S = \min_i \max_j r_{ij} = \min_i r_{\text{i}}^{\max},$$

где $r_{\text{i}}^{\max}$ вычислена по матрице рисков;

$S = \min\limits_i\left\{r_1^{\max},\ r_2^{\max},\ r_3^{\max}\right\} = \min\{5,\ 5,\ 3\} = 3$, что соответствует целесообразности в смысле этого критерия продажам изделия C_3.

Комплексный анализ всех критериев позволяет предположить, что наилучшей стратегией продаж будет продажа изделий H_1, H_2, H_3, C_1, C_3. Изделие C_2 должно быть снято с продаж.

Сведение задач теории игр к задачам линейного программирования

Игра $m\times n$ в общем случае не имеет наглядной геометрической интерпретации. Ее решение достаточно трудоемко при больших m и n, однако принципиальных трудностей не имеет, поскольку может быть сведено к решению задачи линейного программирования [10–12].

Пусть задана платежная матрица игры:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для оптимальной стратегии первого игрока $u^0 = \left(u_1^0,\ u_2^0,\ ...,\ u_m^0\right)$ и цены игры υ выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i^0 \geq \upsilon \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right)$$

или (разделив на υ) — $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{u_i^0}{\upsilon} \geq 1 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right)$.

Обозначая $\frac{u_i^0}{\upsilon} = y_i^0$, получим:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^0 \geq 1 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right); \\ y_i^o \geq 1 \ \left(i = 1,\ ...,\ m;\ \vartheta > 0\right); \\ \sum_{i=1}^{m} y_i^0 = \frac{1}{\vartheta}. \end{cases}$$

Так как первый игрок стремится получить максимальный выигрыш, то он должен обеспечить минимум величины $\frac{1}{\upsilon}$.

С учетом этого определение оптимальной стратегии сводится к нахождению минимума функции

$$L_1 = \sum_{i=1}^{m} y_i \ \text{при условиях} \ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right);\ \ y_i \geq 0 \ \left(i = 1,\ ...,\ m\right).$$

Аналогично определение оптимальной стратегии второго игрока сводится к нахождению максимума функции $L_2 = \sum_{j=1}^{n} x_j$ при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq 1 \ \left(i = 1,\ ...,\ m\right);\ x_j \geq 0 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right),\ где\ = \frac{z_j}{\vartheta}.$$

Таким образом, чтобы найти решение данной игры по матрице A, нужно составить следующую пару двойственных задач и найти их решение.

Прямая задача:

$$\begin{cases} \max L = \sum_{i=1}^{m} x_j; \\ \sum_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \leq 1 \ \left(i = 1,\ ...,\ m\right); \\ x_j \geq 0 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right). \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} \min\ L = \sum_{i=1}^{m} y_i; \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq 1 \ \left(j = 1,\ ...,\ n\right); \\ y_i \geq 0 \ \left(i = 1,\ ...,\ m\right). \end{cases}$$

Используя решения пары задач, можно выявить оптимальные стратегии и цену игры:

$$u_i^0 = \frac{y_i^0}{\sum_{i=1}^{m} y_i^0} = \upsilon y_i^0;\ \ z_j^0 = \frac{x_j^0}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \upsilon x_j^0;\ \ \upsilon = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^0} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^o}$$

$$\left(i = 1,\ ...,\ m;\ j = 1,\ ...,\ n\right).$$

References

1 *Kholod N.I., Kuznetsov A.V., Zhikhar Ya.N. et al.* Economic-mathematical methods and models: Manual textbook. — Minsk: BGEU, 1999. — P. 413.

2 *Lyyus R.D., Rayf H.* Games and decisions: The lane with English. — Moscow: Publishing house of foreign literature, 1961. — P. 643.

3 *Dyubin G.N., Suzdal V.G.* Introduction in the applied theory of games. — Moscow: Nauka, 1981. — P. 336.

4 *J. fon Newmann, Morgenstern O.* Theory of games and economic behavior: The lane with English. — Moscow: Nauka, 1970. — P. 708.

5 *Zamkov O.O., Tolstopyatenko A.V., Cheremnykh Yu.N.* Mathematical methods in economy. — Moscow: M.V.Lomonosov Moscow State University, Publishing house DIS, 1997. — P. 368.

6 *Owen G.* Theory of games: The lane with English. — Moscow: Mir, 1971. — P. 232.

7 *Shikin E.V., Chkhartishvili A.G.* Mathematical methods and models in management: Manual textbook. — Moscow: Delo, 2000. — P. 440.

8 *Germeyer Yu.B.* Games with not opposite interests. — Moscow: Nauka, 1976. — P. 328.

9 *Bagiyev G.L., Tarasevich V.M., Anne H.* Marketing: Textbook. — Moscow: Publ. House JSC Economy, 1999. — P. 703.

10 *Davydov E.G.* Research of operations: Manual. — Moscow: The higher school, 1990. — P. 383.

11 *Partasarathi T., Ragkhavan T.* Some questions of the theory of games of two persons: The lane with English. — Moscow: Mir, 1974. — P. 296.

12 *Kremer N.Sh., Putko B.A., Trishin I.M., Friedman M.N.* Research of operations in economy: Manual textbook. — Moscow: Banks and birzhi, UNITI, 1997. — P. 407.

Р.С.Каренов

Ойындардың математикалық ілімінің көмегімен экономикалық және басқарушылық есептерді шешу әдістемесі

Шиеленісті жағдайлары бар міндеттерді шешу үшін ойындар ілімі деп аталатын ғылыми негізделген тәсіл құрылғандығы айтылған. Қазіргі кезде ойындар ілімін қолдану аясын кеңейтуге бағытталған үлкен жұмыстар атқарылып жатқаны көрсетілген. Әр түрлі ойындарды қандайда бір принципке негіздей отырып жіктеуге болатындығы туралы қорытынды жасалған. Өнеркәсіп кәсіпорындарында оңтайлы шешімдерді таңдау үшін ойындар ілімін пайдаланудың ілімдік негіздері қарастырылған. Ауыл шаруашылығындағы экономикалық міндеттерді шешуде ойындар ілімін қолданудың әдістемелік негіздері ашылған. Ойындар ілімін сауда кәсіпорындары қызметін талдау үшін пайдаланудың әдістемелік принциптері ұсынылған. Ойындар ілімі есептері іс жүзінде сызықтың бағдарламалау міндеттерін шешуге келіп саятыны туралы қорытынды жасалған.

R.S.Karenov

Technique of the solution of economic and administrative tasks by means of the mathematical theory of games

It is noted that for the competent solution of tasks with conflict situations scientifically reasonable method which carries the name the theory of games is created. It is emphasized that a lot of work directed on expansion of scope of the theory of games now is conducted. The conclusion is drawn that different types of games can be classified, being based on this or that principle. Methodical bases of use of the theory of games for a choice of optimum decisions at the industrial enterprises are considered. Methodical principles of application of the theory of games are revealed at the solution of economic tasks in agriculture. The methodical approach for use of mathematical apparatus of the theory of games for the analysis of activity of trade enterprises is offered. The conclusion that the task of the theory of games in principle can be reduced to the solution of a problem of linear programming locates.