О КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

Ергалиев М.[1], Токешева А.С.[2]

[1]*Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы.*

[1]*Карагандинский государственный университет им. академика Е. А. Букетова, Караганда,*

E-mail: tokesheva.a@mail.ru

Рассматривается первая краевая задача теплопроводности в вырождающейся угловой области:

$$\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0;\ 0<x<mt,\ t\in(0,T)\ , \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0+}=0;\quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=mt}+k\widetilde{u}(t)=0\ , \tag{2}$$

где

$$\widetilde{u}(t)=u(x,t)\big|_{x=mt}=u(mt,t),$$

k и m - заданы [1].

Решение уравнения теплопроводности может быть представлено в виде суммы тепловых потенциалов простого слоя [2]:

$$u(x,t)=\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\nu(\tau)d\tau+\frac{a}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{(x-m\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}}\varphi(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где функции $\nu(t),\varphi(t)$ необходимо определить.

Известно, что функция определенная данным равенством удовлетворяет уравнению (1) для любых $\nu(t),\varphi(t)$ для которых существуют интегралы в (3). Удовлетворяя граничные условия и выполнив необходимые преобразования, краевую задачу (1)-(2) сведем к решению интегрального уравнения:

$$\varphi(t)-\frac{m}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{t+\tau}{(t-\tau)^{3/2}}e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{m}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\varphi(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{ka}{\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{m^2(t-\tau)}{4a^2}}\left[e^{-\frac{m^2t\tau}{a^2(t-\tau)}}+1\right]\varphi(\tau)d\tau=0. \tag{4}$$

Для данного псевдо-Вольтеррового интегрального уравнения второго рода строится характеристическое, решение которого найдено в явном виде.

Используя метод регуляризации решением характеристического уравнения сводим уравнение (4) к интегральному уравнения Вольтерра со слабой особенностью, которое решается методом последовательных приближений.

Показано, что поставленная однородная краевая задача имеет ненулевое решение.

Классы единственности для граничной задачи (1)-(2) определяются следующим утверждением.

Теорема. Классами единственности решения для граничной задачи (1)-(2) являются $L_\infty\left(G;\left[x^{1/2+\alpha}+t^{(1/2+\alpha)/2}\right]^{-1}\right),\ \alpha>0$.

Список использованных источников

1. *Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. – Алматы: Ғылым, 2010. – 334 с.

2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 734 с.