На основании полученных поверхностей влияния $S(x,y)$, $Q1(x,y)$ и $Q2(x,y)$ можно производить расчеты мембраны на действие сосредоточенных сил, приложенных к разным точкам мембраны.

Таким образом, используя метод расчета мембраны [1], можно определить напряженно-деформированное состояние мембраны при действии произвольной системы сосредоточенных сил.

Список литературы

1. *Ивович В.А., Покровский Л.Н.* Динамический расчёт висячих покрытий. — М.: Стройиздат, 1989. — 312 с.
2. *Турсунов К.А.* Механика мембран, пластин и оболочек. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 141 с.
3. *Турсунов К.А.* Механика стержневых конструкций. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 141 с.

УДК 532.685

Ж.О.Оралбекова

Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Мақалада қос фазалық сұйықтың қуыс ортадағы сүзгіленуін сипаттайтын есептің дәл шешімін анықтайтын класы қарастырылған. Есептің шешімі екі өлшемді жағдайда зерттеліп, бір бос (белгісіз) шекарасы болғандағы дәл шешімін табудың алгоритмі келтірілген.

In work the class of exact decisions of a problem of a biphase filtration of a liquid in the porous environment is considered. In a two-dimentional case the algorithm of construction of the decision of the considered problem containing free (unknown) border is resulted.

В данной работе исследована двумерная задача теории фильтрации со свободными границами. Предлагаемый метод применен ранее в работе [1] с целью построения класса точных решений двумерных задач неоднородной жидкости и магнитной гидродинамики. В случае определения топологической структуры течения недостаточно ограничиться стационарной моделью. Развивается указанный в работе [1] метод для систем уравнений теории фильтрации составного типа. Известно [2–3], что в случае фильтрации двухфазной жидкости в пористой среде движение фаз подчиняется обобщенному закону Дарси и насыщенности $s = s(x,y,t)$ смачивающей жидкостью, причем уравнение относительно насыщенности вырождается на искомом решении.

Постановка задачи. Будем рассматривать двухкомпонентную жидкость как совокупность континуумов, заполняющих один и тот же объем несжимаемого парового пространства. Для каждого из континуумов, помимо насыщенностей s_i, введем свою плотность ρ, скорость фильтрации $\vec{v}_i$ и давление p. Тогда уравнения неразрывности каждой компоненты жидкости могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_i s_i\right) + div\left(\rho_i \vec{v}_i\right) = 0, \qquad i = 1,2. \tag{1}$$

Учитывая качественную картину многофазной фильтрации, М.Маскет предложил следующее формальное обобщение закона Дарси для каждой из жидкостей:

$$\vec{v}_i = -K_0 \frac{\overline{k}_{0i}}{\mu_i}\left(\nabla p_i + \rho_i \vec{g}\right), \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

где K_0 — по-прежнему коэффициент фильтрации пористой среды для однородной жидкости (или симметричный тензор для анизотропной среды); μ_i — коэффициенты динамической вязкости; а $\overline{k}_0^i$ — относительные фазовые проницаемости. При этом $\overline{k}_0^i$ должны зависеть от насыщенности s_i, поскольку часть парового пространства занята другой жидкостью. По определению насыщенности s_i

меняются в пределах $0 < s_0^i \le s_i \le 1 - s_j^0,\ \ i \ne j,\ \ s_1 + s_2 = 1,$ и по достижению значений $s_i = s_i^0$, движение i-й компоненты прекращается, что обеспечивается выполнением условий $\overline{k}_0^i(s_i^0) = 0,\ i = 1,2.$ Ниже рассматривается плоское установившееся течение несмешивающейся двухфазной жидкости в пористой среде в области Ω, имеющей вид плоского канала $A_1A_2A_3A_4$ с одной криволинейной стенкой A_1A_4. Для определенности будем считать, что жидкость втекает в Ω через участок A_1A_2 и вытекает через A_3A_4. Боковые стенки A_2A_3 и A_1A_4 считаем непроницаемыми для жидкости. Пусть a — длина канала, b — ширина входа канала, т.е. длина отрезка A_1A_2; $y = f(x),\ x \in [0,a]$ — уравнение границы A_1A_4. Такое движение жидкости в пористой среде соответствует вытесняющему агенту от нагнетательной скважины до добывающей скважины.

$$\begin{cases} m\dfrac{\partial s}{\partial t} + div\left(s \cdot \vec{v}_в\right) = 0, \\ m\dfrac{\partial (1-s)}{\partial t} + div\left((1-s)\cdot \vec{v}_н\right) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

При указанных выше предположениях уравнение (3) преобразуется к следующему виду:

$$div\vec{v} \equiv div\left[s \cdot \vec{v}_и + (1-s)\cdot \vec{v}_н\right] = 0, \tag{4}$$

где $\vec{v} \equiv (v_1, v_2)$ — приведенная скорость.

С другой стороны, из (2) и (4), без учета гравитационных и с учетом капиллярных сил, имеем:

$$div\vec{v} \equiv div\left[s \cdot k_и \cdot \nabla p_и + (1-s)\cdot k_н \cdot \nabla p_н\right] = 0 \tag{5}$$

или

$$div\left[k(s)\cdot \nabla p_и + \vec{h}(s)\right] = 0.$$

Тогда из последнего уравнения путем перрекрестного дифференцирования получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{k(s)}\cdot\left(v_1 - h_1(s)\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{k(s)}\cdot\left(v_2 - h_2(s)\right)\right] = 0. \tag{6}$$

Исходя из результатов работы [3] считаем, что $k(s) = const > 0$.

Тогда, исходя из результатов работы [2], с помощью замены $\psi = \dfrac{v_2}{v_1},\quad r = \ln v_1,\quad (v_1 > 0)$ преобразуем (6) следующим образом:

$$-r_y + \psi \cdot r_x + \psi_x = e^{-r}\cdot F(s), \qquad r_x + r_y \cdot \psi + \psi_y = 0, \tag{7}$$

где $F(s) = -h_{1_y} + h_{2_x}$ — относительная проницаемость.

В силу условий непроницаемости функция ψ на A_2A_3 и A_1A_4, а функция s на A_1A_2 удовлетворяют условиям:

$$\psi\big|_{A_2A_3} = 0, \quad \psi\big|_{A_1A_4} = f', \quad s\big|_{A_1A_2} = s^0(y). \tag{8}$$

В случае нестационарной задачи для замыкания математической модели добавляется следующее начальное условие:

$$s = s_0(x,y),\ \text{причем}\ s^0(y) = s_0(x,y)\ \text{при}\ x = 0. \tag{8'}$$

На границе A_1A_2 будем считать значение r известным, так как на нагнетательной скважине задается расход. Для определения единственного решения системы (5) необходимо еще задать значения ψ на A_1A_2 и A_3A_4. Указанные значения ψ не задаются, а определяются из условия существования точного решения системы (7). С учетом краевых условий (8) можно положить $\psi = \Phi(y/f)f'$, где Φ — некоторая функция, определенная на промежутке $[0,1]$, удовлетворяющая условиям $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1) = 1$ и Φ, — является неизвестной функцией. Таким образом, задача сведена к решению уравнений (5), причем в области течения фильтрационного канала выполняется условие

$$\psi = \Phi\left(\frac{y}{f}\right)\cdot f'. \tag{9}$$

Применяя метод характеристик во второе уравнение из (7) легко получить явный вид функций:

$$r(x,y)=\ln\frac{C_1}{\psi(x,y)}. \tag{10}$$

Умножив первое уравнение на функцию ψ и сложив со вторым уравнением из систем уравнений (7), получим:

$$\left(1+\psi^2\right)\cdot r_x+\psi\cdot\psi_x+\psi_y=\psi\cdot e^{-r}\cdot F(s). \tag{11}$$

С другой стороны, со второго уравнения из (7): $r_x=-\psi_y$. Подставляя последнее соотношение в (11), имеем:

$$\psi_x-\psi\cdot\psi_y=e^{-r}\cdot F(s),$$

либо с учетом (10) получим:

$$\psi_x-\psi\cdot\psi_y=\frac{\psi}{C_1}\cdot F(s). \tag{12}$$

Далее, применяя метод характеристик относительно уравнения (12) в явном виде относительно функции ψ получим следующее интегральное выражение:

$$\psi=-\frac{1}{C_1}\cdot\int F(s)dy+C_2,$$

либо из представления из функций ψ имеем:

$$\Phi\left(\frac{y}{f(x)}\right)\cdot f'(x)=-\frac{1}{C_1}\cdot\int F(s)d\tau+C_2.$$

Для определения постоянных воспользуемся условиями относительно функций Φ, т.е. при $y=0$ имеем $C_2=0$, а при $y=f(x)$ получим

$$f'(x)=-\frac{1}{C_1}\cdot\int_0^{f(x)}F(s)d\tau. \tag{13}$$

С помощью (13) и с учетом $f(0)=b$ составим следующее рекуррентное соотношение:

$$f_n(x)=b-\frac{1}{C_1}\int_0^x\int_0^{f_{n-1}(\xi)}F(s)d\tau d\xi, \tag{14}$$

где $C_1=e^{r(0,b)}$.

Найденные значения постоянных окончательно позволяют получить представление относительно функций Φ:

$$\Phi\left(\frac{y}{f(x)}\right)=\frac{\int_0^y F(s)d\tau}{\int_0^{f(x)}F(s)d\tau}. \tag{15}$$

Полученные соотношения в (13)–(15) позволяют определить полностью искомые функции, и окончательный результат можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. При выполнении условий $C_1=e^{r(0,b)}>0$, (8) и (8') для решения рассматриваемой задачи справедливы представления (14), (15) и для насыщенности имеет место:

$$s(t,x,y)=s_0(x,y)\cdot\exp\left\{-\int_0^x\frac{div\vec{v}}{v_1}d\xi\right\}.$$

Ради подтверждения полученных результатов проведены численные эксперименты с реальными данными конкретного месторождения: «Восточный Молдабек» Атырауской области. По продложенной методике проведены расчеты для определения неизвестных границ относительно водонасыщенности, концентрации поверхностно-активных веществ, температуры и давления. Результаты расчетов приведены на рисунках 1–6. На рисунках 1–2 показаны изменения границы относительно водонасыщенности и концентрации.

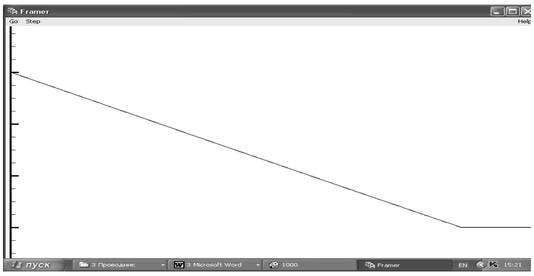

Рис. 1. Фронт водонасыщенности

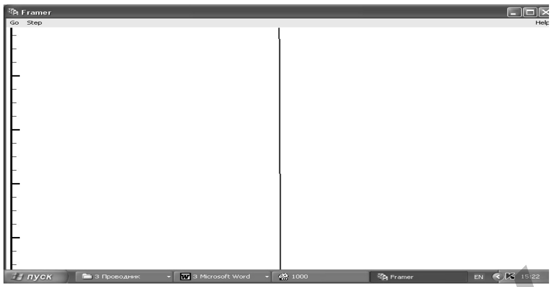

Рис. 2. Фронт изменения концентрации

На рисунках 3–4 показаны изменения границы относительно давления.

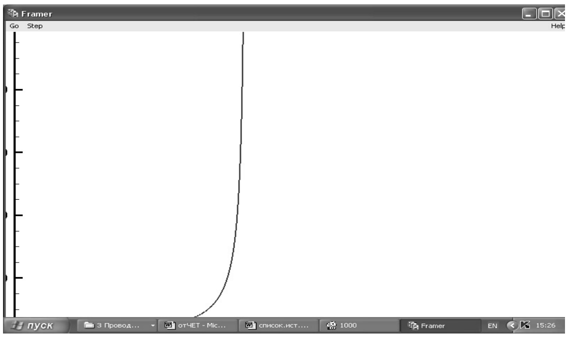

Рис. 3. В начале расчета

Рис. 4. В конце расчета

На рисунках 5–6 показаны изменения границы относительно температуры по времени.

Рис. 5. В начале расчета

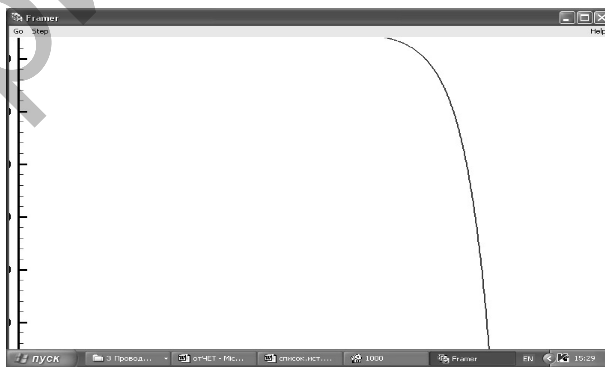

Рис. 6. В конце расчета

Расчеты показывают, что отклонение от реальных измерений по инженерным моделям составляют 10–13 процентов.

Список литературы

1. *Алексеев Г.В., Мокин Ю.А.* Класс точных решений двумерных уравнений гидродинамики и магнитной гидродинамики идеальной жидкости // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1972. — Вып. 12. — С. 5–13.
2. *Levitt L.C.* Some Exact Solutions for a Class of two-dimensional Gydromagnetic steady Flows // J. Math. Analysis and Appl. — 1963. — Vol. 6. — P. 483–396.
3. *Антонцев С.Н., Монахов В.Н.* О некоторых задачах фильтрации двухфазной несжимаемой жидкости // Динамика сплошной среды. — Новосибирск, 1969. — Вып. 2. — С. 156–167.