

Н.К.Аширбаев

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.Ауезова, Шымкент

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С КРЕСТООБРАЗНЫМ ОТВЕРСТИЕМ

Мақалада күрделі түрдегі тесігі бар көлденең қимасы тік төртбұрыш болатын қатты денедегі серпімді толқындардың таралуы қарастырылған. Жазық деформация жағдайында есептің шешімін табу үшін кеңістіктік сипаттама әдісі қолданылған. Берілген сыртқы күштің әсерінен күрделі түрдегі тесіктің маңайындағы серпімді толқындық өрістің уақыт бойынша таралу процесі зерттелген.

Earlier mathematical model for research of problems of propagation of plane waves in a rectangle of the limiting sizes with holes and inclusions was developed. It was based on realization of the Clifton's difference model of the calculation for the numerical solution of two-dimensional dynamic problems of the theory of elasticity. In these researches the holes of the elementary rectangular form were considered.

Исследование волновых процессов в упругих телах с локальными неоднородностями (ослаблениями) в виде инородных включений, отверстий и др. представляет большой интерес, вызванный потребностями развития механики деформируемого твердого тела и многочисленными приложениями в различных отраслях современной техники.

При численном исследовании неустановившихся волновых процессов в телах с различными неоднородностями наибольшее распространение получили конечно-разностные методы, в частности, сеточно-характеристические методы Годунова [1], Клифтона [2, 3] и метод конечных разностей [4–6].

Уравнения, определяющие динамические упругие деформации в плоской задаче, составляют систему гиперболических уравнений в частных производных с двумя действительными скоростями  $(c_1, c_2)$  распространения волн. Определяющая система дифференциальных уравнений в частных производных может быть сформулирована несколькими альтернативными способами. В данной работе динамическая задача теории упругости записывается в виде симметричной системы дифференциальных уравнений первого порядка для напряжений и скоростей [7, 8]. Эта постановка выбрана потому, что такие системы изучены в настоящее время достаточно глубоко и основательно [2, 3, 7, 8], и, кроме того, при выборе скоростей и напряжений в качестве зависимых переменных исключаются производные из граничных условий.

Поэтому, следуя работе [7], рассматриваем систему уравнений для скоростей  $v_1, v_2$  и трех линейных комбинаций  $p, q, \tau$  компонент тензора напряжений:

$$\begin{aligned} v_{1,t} - p_{,1} - q_{,1} - \tau_{,2} &= 0; & v_{2,t} - p_{,2} + q_{,2} - \tau_{,1} &= 0; \\ \gamma^2 (\gamma^2 - 1)^{-1} p_{,t} - v_{1,1} - v_{2,2} &= 0; & \gamma^2 q_{,t} - v_{1,1} + v_{2,2} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

**Постановка задачи.** Исследуется плоская деформация упругого тела с прямоугольным поперечным сечением и вырезом в виде крестообразного отверстия. Сечение имеет размеры  $0 \leq x_1 \leq l$  и  $-L \leq x_2 \leq L$  (рис. 1). В пределах сечения есть вырез, форма которого имеет вид креста. Отверстие заключено в промежутках между двумя прямоугольниками

$$\begin{aligned} l_1^{(1)} \leq x_1 \leq l_2^{(1)} \text{ и } L_1^{(1)} \leq x_2 \leq L_2^{(1)}, \\ l_1^{(2)} \leq x_1 \leq l_2^{(2)} \text{ и } L_1^{(2)} \leq x_2 \leq L_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Стороны прямоугольника разбиты на  $n_1$  и  $n_2$  частей. При этом шаги разбиения по координатам определены равенствами  $h_1 = l / n_1$  и  $h_2 = L / n_2$ . Таким образом, произвольная узловая точка  $O_{ij}$  будет иметь координаты  $(x_1^i, x_2^j)$ . При этом  $x_1^i = ih_1$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n_1$ ) и  $x_2^j = jh_2$  ( $j = -n_2, -n_2 + 1, n_2 + 2, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, n_2 - 1, n_2$ ).

На контурных точках выступающих частей отверстия должно присутствовать не менее трех узловых точек. Это ограничение связано с применением использованной девятиточечной схемы аппроксимации первых и вторых производных в угловых точках и требованием обеспечить непрерыв-

ность параметров, которые на границе отверстия имеют заданное нулевое значение, а во внутренних точках — отличное от нуля расчетное значение.

В начальный момент времени  $t=0$  на части  $L^* \leq x_2 \leq L^{**}$  поверхности  $x_1=0$  прикладывается внешняя нормальная П-образная нагрузка

$$\begin{cases} p+q=f(x_2,t)=A \cdot \sin(\omega t), \\ \tau=0 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq t^*, \quad (3)$$

изменяющаяся во времени  $t$  и постоянная по поперечной координате  $x_2$ , а остальная часть лицевой поверхности  $x_1=0$  свободна от напряжений. В (3) принято, что коэффициент  $A$  является амплитудой внешней нагрузки, а  $\omega$  — её частота. Нагрузка действует на ограниченном участке времени  $t^*$ . В моменты времени, превышающие  $t^*$ , нагрузка не прикладывается, т.е. считается, что

$$\begin{cases} p+q=0 \\ \tau=0 \end{cases} \quad \text{при } t \geq t^*. \quad (4)$$

Тыльная поверхность  $x_1=l$  не нагружена и поэтому считается свободной от каких-либо внешних воздействий, т.е.

$$\begin{cases} p+q=0 \\ \tau=0 \end{cases} \quad \text{при } t \geq 0. \quad (5)$$

Боковые поверхности  $x_2=\pm L$  предполагаются закрепленными и на них скорости перемещений равны нулю в любой момент времени, т.е.

$$v_1(x_1;t)=v_2(x_1;t)=0 \quad \text{при } t \geq 0. \quad (6)$$

Наконец, границы внутреннего отверстия считаются свободными от напряжений.

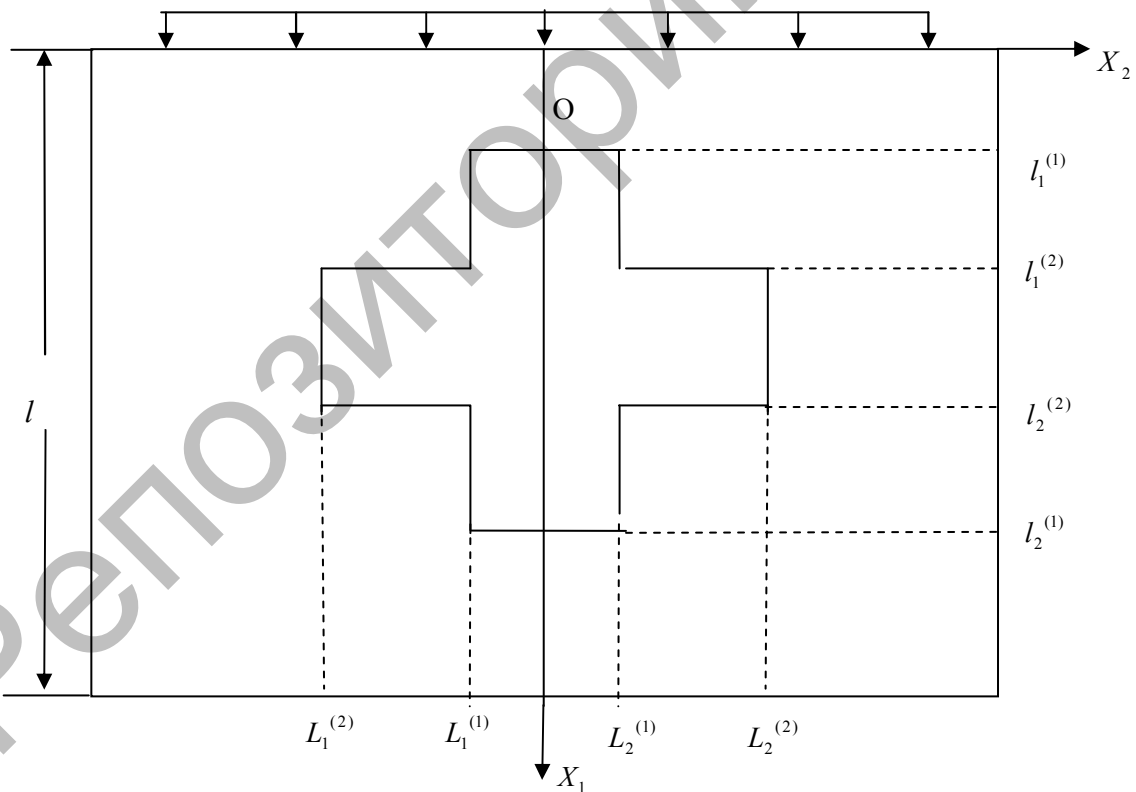


Рис. 1. Исследуемая область

При

$$\begin{aligned} & x_1=l_1^1, \quad x_1=l_2^1 \text{ и } L_1^1 \leq x_2 \leq L_2^1 \\ & \begin{cases} p+q=0 \\ \tau=0 \end{cases} \quad \text{при } t \geq 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При

$$x_1 = l_1^{(2)}, \quad x_1 = l_2^{(2)} \text{ и } L_1^{(2)} \leq x_2 \leq L_1^{(1)} \text{ и } L_2^{(1)} \leq x_2 \leq L_2^{(2)}$$

$$\begin{cases} p + q = 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \text{ при } t \geq 0. \quad (8)$$

При

$$x_2 = L_1^{(2)}, \quad x_2 = L_2^{(2)} \text{ и } l_1^{(2)} \leq x_1 \leq l_2^{(2)}$$

$$\begin{cases} p - q = 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \text{ при } t \geq 0. \quad (9)$$

При

$$x_2 = L_1^{(1)}, \quad x_2 = L_2^{(1)} \text{ и } l_1^{(1)} \leq x_1 \leq l_1^{(2)} \text{ и } l_2^{(2)} \leq x_1 \leq l_2^{(1)}$$

$$\begin{cases} p - q = 0 \\ \tau = 0 \end{cases} \text{ при } t \geq 0. \quad (10)$$

Граничные условия (3)–(10) должны быть дополнены начальными условиями. Предполагается, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) тело не нагружено и находится в состоянии покоя, так что

$$v_1(x_1; x_2; 0) = v_2(x_1; x_2; 0) = p(x_1; x_2; 0) = q(x_1; x_2; 0) = \tau(x_1; x_2; 0) = 0. \quad (11)$$

Таким образом, необходимо найти решение уравнений (1) при сформулированных граничных и начальных условиях (3)–(11).

Поставленная задача решена методом пространственных характеристик, подробный алгоритм численной реализации которого изложен в [9]. В дополнение к известным соотношениям [9] получены разрешающие уравнения в особых точках  $x_2 = L^*$  и  $x_2 = L^{**}$  границы  $x_1 = 0$ , для нахождения искомого функций, в которых граничные условия терпят разрыв первого рода [10].

Настоящие расчеты проведены для прямоугольной области  $0 \leq x_1 \leq 100 h_1$  и  $|x_2| \leq 100 h_2$  с отверстием. При этом полагали, что  $h_1 = h_2 = h = 0.05$ . Шаг по времени  $k$  выбран в соответствии с необходимыми условиями устойчивости используемой явной конечно-разностной расчетной схемы. В расчетах он считался равным  $k = 0.025$ . Коэффициент  $A$  в равенстве (3) принят равным единице, а период приложенной импульсной нагрузки был выбран равным  $T = 100k$ . Таким образом, круговая частота динамической нагрузки  $\omega$  принята равной  $\omega = \pi / T$ . В выполненных расчетах отрезок, на который прикладывается нормальная П-образная нагрузка, удовлетворял условию  $|x_2| \leq 25h$ . Размеры отверстия и его характерные точки в проведенных исследованиях были приняты следующими:

$$l_1^{(1)} = 25h, \quad -10h \leq x_2 \leq 10h,$$

$$l_1^{(2)} = 40h, \quad -25h \leq x_2 \leq -10h \text{ и } 10h \leq x_2 \leq 25h,$$

$$l_2^{(2)} = 60h, \quad -25h \leq x_2 \leq -10h \text{ и } 10h \leq x_2 \leq 25h,$$

$$l_2^{(1)} = 75h, \quad -10h \leq x_2 \leq 10h,$$

а также

$$L_1^{(2)} = -25h, \quad 40h \leq x_1 \leq 60h,$$

$$L_1^{(1)} = -10h, \quad 25h \leq x_1 \leq 40h \text{ и } 60h \leq x_1 \leq 75h,$$

$$L_2^{(1)} = 10h, \quad 25h \leq x_1 \leq 40h \text{ и } 60h \leq x_1 \leq 75h,$$

$$L_2^{(2)} = 25h, \quad 40h \leq x_1 \leq 60h.$$

Анализ скоростей перемещений точек и напряжений в них показывает, что для области с отверстием и для области без отверстия вдали от этого отверстия их распределения по оси  $x_2$  практически совпадают. Отличия этих параметров наблюдаются лишь вблизи отверстия, на расстояниях, равных  $4h - 6h$  от отверстия.

Поэтому представляет интерес провести анализ динамического поля напряжений около отверстия. Такой анализ проводится с целью выявления областей концентрации напряжений. Можно предположить, что именно в этих областях может произойти разрушение среды. Хотя результаты, полученные для упругой среды, имеют характер прогнозов, можно считать, что они будут полезными и в других ситуациях.

Прежде всего, на всех приведенных на рисунках результатах расчетов видна симметрия рассматриваемых параметров, что является подтверждением достоверности получаемых результатов, по крайней мере, в области исследованных промежутков времени.

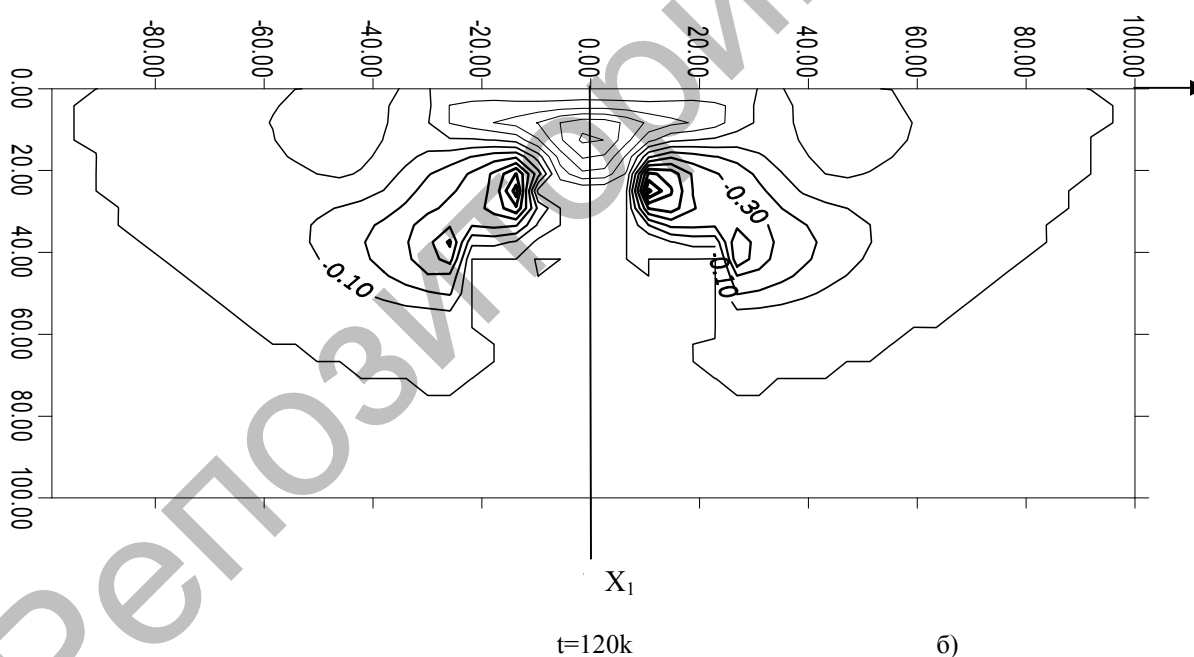
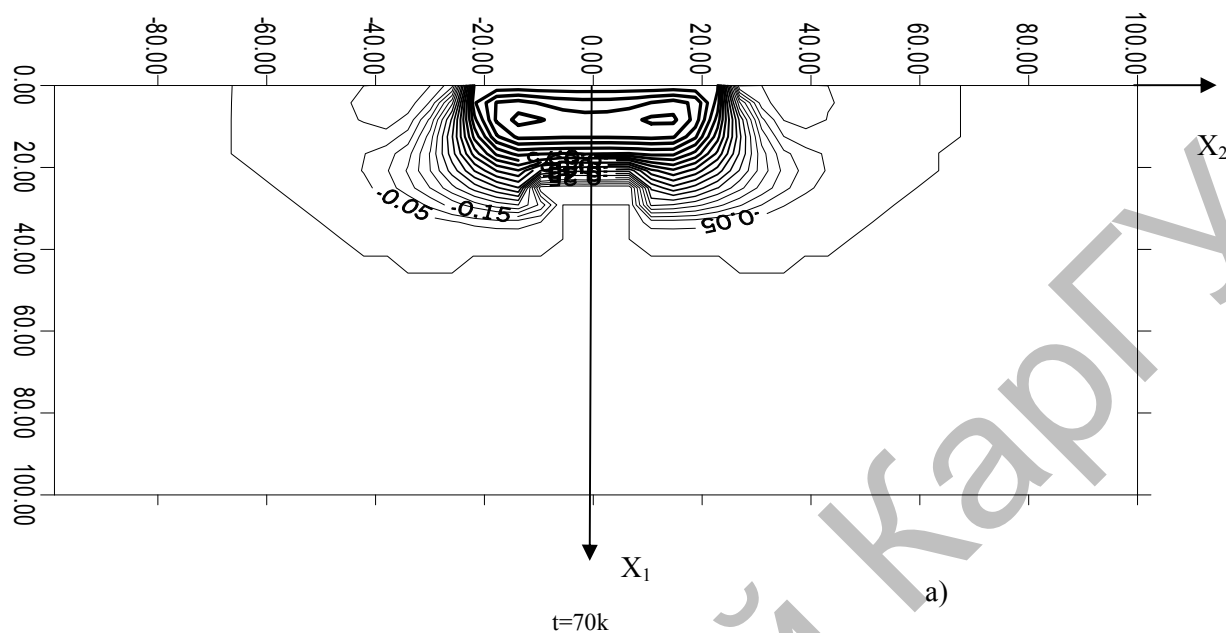


Рис. 2. Изолинии нормальной компоненты  $p+q = const$  в различные моменты времени

В связи с этим на рисунках 2–3 в плоскости  $x_1, x_2$  для различных моментов времени приведены соответственно изолинии нормальных  $p+q = const$  и касательных  $\tau = const$  напряжений, демонстрирующих характерное для данной задачи напряженное состояние. Эти изолинии дают общую картину напряженного состояния во всей области в определенный момент времени. Внимательное изучение изолиний нормальной компоненты  $p+q = const$  напряжений показывает, что на поведение изолиний нормальной компоненты  $p+q = const$  напряжений большее влияние оказывают особые точки исследуемой области. В самом деле, на рисунках 2 а, б можно видеть сгущение изолиний нор-

мальной компоненты  $p + q = const$  напряжений в окрестности особых точек. Особо эффективным представляется концентрация напряжений в окрестности точки разрыва граничных условий (рис. 2 а).

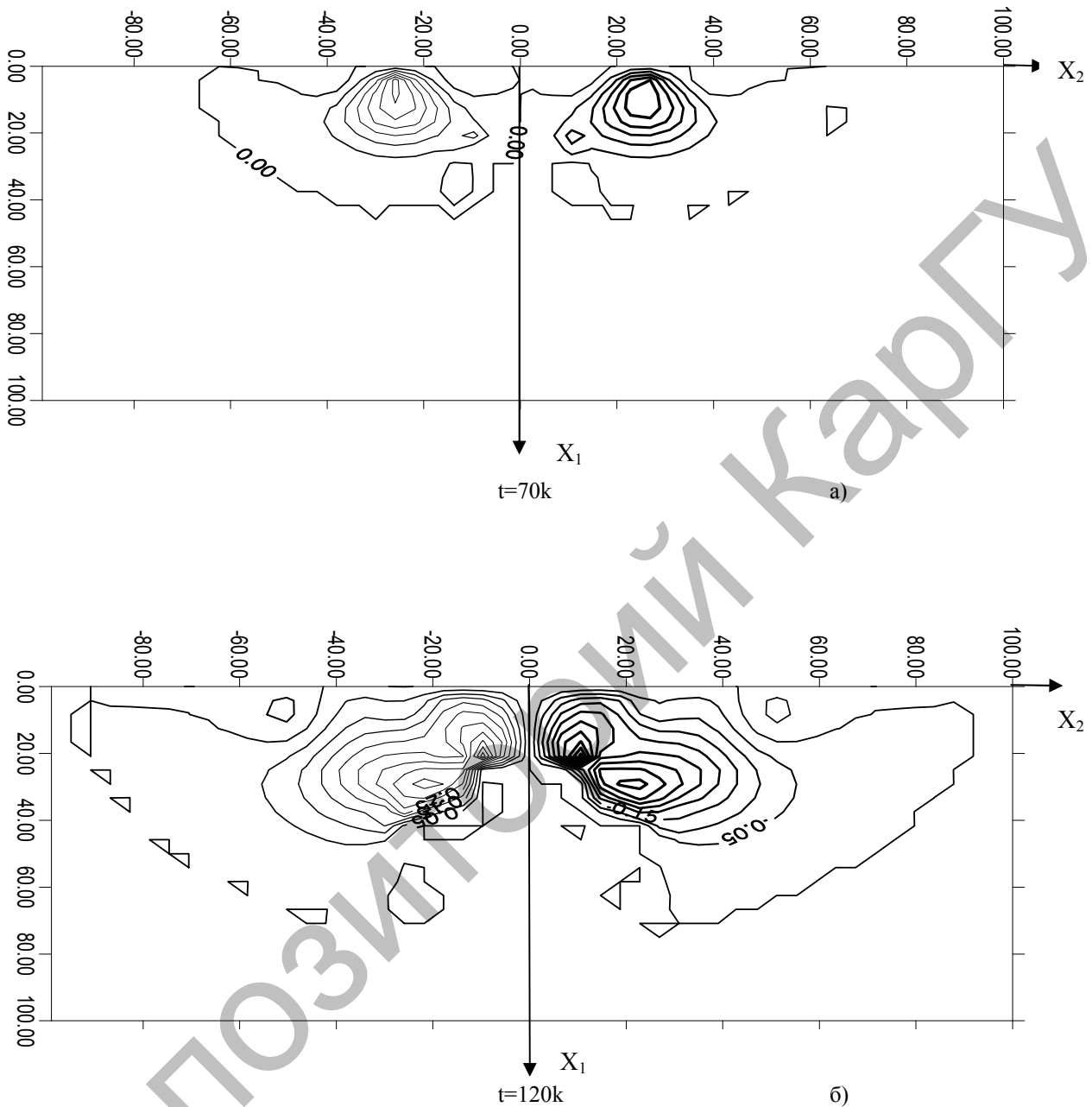


Рис. 3. Изолинии сдвиговой компоненты  $\tau = const$  в различные моменты времени

На изолинии сдвиговой компоненты  $\tau = const$  тензора напряжений определяющее влияние оказывают нулевые граничные условия на лицевой  $x_1 = 0$  и тыльной  $x_1 = 100h$  поверхностях и ограничивающих сторонах отверстия исследуемой области. В указанных точках поперечные скорости  $v_2$  частиц отличны от нуля. В связи с этим эффект особых точек на изолинии сдвиговой компоненты  $\tau = const$  напряжений своеобразен. Внимательное изучение изолиний сдвиговой компоненты  $\tau = const$  напряжений показывает, что максимумы сдвиговой компоненты  $\tau$  напряжений движутся квантами, определяя колебательное движение сдвиговой волны, и в соответствии с периодом заданного гармонического импульса.

В последующие моменты времени суперпозиция многократно отраженных и дифрагированных волн от границ отверстия и полосы приводит к формированию сложной волновой картины внутри полосы с отверстием.

Анализ изолиний нормальных  $p + q = const$  и касательных  $\tau = const$  напряжений, построенных для различных моментов времени, показывает практически идентичный описанному характер их распределения. Однако уровень напряжений, место расположения локальных экстремумов, появление и образование зон растягивающих напряжений в различные моменты времени отличаются друг от друга. Отверстие оказывает заметное влияние и на характер распределения скоростей движения в отдельных точках полосы.

### Список литературы

1. *Навал И.К., Сабодаш П.Ф.* Численное решение задачи о распространении волн напряжений в сплошном цилиндре переменного радиуса // Известия АН МССР. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1974. — № 3. — С. 27–35.
2. *Аширбаев Н.К., Байтелиев Т.Б., Каримбаев Т.Д.* Аналитическое исследование влияния инородных включений на параметры волнового движения в упругом прямоугольнике // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1987. — № 4. — С. 128–133.
3. *Чебан В.Г., Навал И.К., Сабодаш П.Ф., Чередниченко Р.А.* Численные методы решения задач динамической теории упругости. — Кишинев: Штиинца, 1976. — 225 с.
4. *Ковишов А.Н.* О дифракции нестационарной упругой волны на цилиндрической полости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1976. — № 4. — С. 115–121.
5. *Ковишов А.Н., Неццетов И.И.* О дифракции нестационарной поперечной волны на цилиндрической полости // Известия АН СССР. Механика твердого тела. — 1982. — № 5. — С. 72–77.
6. *Хэбберстед.* Численное решение двумерной задачи о распространении упругих волн в стержнях различной конфигурации // Прикладная механика: Тр. Амер. об-ва инж.-механиков. Сер. Е. — 1971. — Т. 38. — № 1. — С. 62–69.
7. *Клифтон Р.Дж.* Разностный метод в плоских задачах динамической упругости // Механика: Сб. пер. — 1968. — № 1. — С. 103–122.
8. *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Двумерные волны напряжений в однородных и структурно-неоднородных средах. — Алма-Ата: Наука, 1983. — 171 с.
9. *Ержанов Ж.С., Каримбаев Т.Д., Байтелиев Т.Б.* Волны напряжений в однородных и неоднородных средах. — Алматы: Ғылым, 1998. — 142 с.
10. *Аширбаев Н.К.* Влияние характера изменения внешней нагрузки на распространение динамических возмущений в упругой однородной среде // Механика и моделирование процессов технологии. — 2005. — № 1. — С. 37–41.

УДК 621.752(031)

Ж.Б.Бакиров, В.Ф.Михайлов

Карагандинский государственный технический университет

### МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

*Әр түрлі кездейсоқ процестердің түрлері қарастырылады, олар үшін стохастикалық айырма теңдеулерін қолданып, дискреттік ұқсастықтар алынады. Олардың статистикалық өңделуі шығу процесінің негізгі ықтималдық сипаттамаларын алу мүмкіндігін береді.*

*Different types of random processes are considered. Discreet analogues applying stochastic difference equations are given for those types. Their statistical computing important probabilistic characteristics availability of output process is enabled.*

При цифровом моделировании на ЭВМ арифметические операции проводят в фиксированные моменты времени (дискретно). Поэтому непрерывные процессы, представляющие внешние возмущения, и вызванные ими колебания механической системы необходимо представлять в дискретной форме.

Если случайное воздействие имеет дробно-рациональную спектральную плотность, то его можно рассматривать как результат прохождения нормального белого шума через линейную систему с постоянными коэффициентами, называемую формирующим фильтром.