

екені анық. Бірақ  $G_1$ -группаның

$$[\vartheta, a_2^{-1}] = a_1$$

және

$$[\vartheta, a_1^{-1}] = a_1^{-1} a_2$$

элементтері барлық  $A$ -группаның жасаушысы болады.

Сонымен қоса  $G$ -группаның келесі элементтері  $A$ -группаның жасаушыларың құрайды:

$$[\vartheta a_2^{-1}] = \vartheta^{-1} a_2 \vartheta a_2^{-1} = (0, \alpha)(\alpha, 1) \left(0, \frac{1}{2}\right) (-\alpha, 1) =$$

$$= (\alpha^2, \alpha) \left(-1, \frac{1}{2}\right) = (a = \alpha_2 + 1 - \alpha, 1) = (1, 1) = a_1;$$

$$[\vartheta, a_1^{-1}] = \vartheta^{-1} a_1 \vartheta a_1^{-1} = a_2 a_1^2 = a_1^{-1} a_2;$$

$$\{[\vartheta, a_2^{-1}], [\vartheta, a_1^{-1}]\} = G_1 \ni a_1, a_2 \supset A,$$

онда

$$G = A.$$

Осылайша 1-ші нөмірден бастап кез келген  $\alpha$  үшін

$$[G_{\alpha-1}, G] = A$$

екенін көрсете аламыз. Онда  $G$ -группаның төменгі центрлік тізбегі 1-ші нөмірден бастап  $A$ -ға стабилизацияланады.

$$G \supset A = A = A = A = \dots$$

Сондықтан  $G$ -группа кемімелі центрлік қатарды қамтымайтыны шығады.

#### Әдебиеттер тізімі

1. Ree R. On ordered, finitely generated, solvable groups // Trans. Roy. Soc. — Canada, 1954. — № 48. — С. 39–42.
2. Виноградов А.Л. Замечание по теории частично упорядоченных групп и полугрупп // Алгебра и логика. — М., 1962. — № 2. — С. 22–29.

УДК 517.51

А.Т.Сыздыкова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

#### ПРОСТРАНСТВО БЕСОВА С БАЗИСОМ ПО КРАТНОЙ ОБОБЩЕННОЙ СИСТЕМЕ УОЛША И ЕГО ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ НОРМИРОВКИ

Мақалада ең жақсы жуықтау және үзілісдік модулі терминдерінде еселі жалтыланған Уолш жүйесі бойынша Бесов кеңістігінің эквивалентті нормалары қарастырылған. Сондай-ақ оның құрылу тізбектерінің шенелгендігінің қажеттілігі көрсетілген.

In this work we consider equivalent norms of the Besov space with bases by the multiple Walsh system in terms the best approximations and modulus of continuous. We show the essentiality of boundedness of elemental sequence of systems.

Пусть  $P^n = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$   $n$ -кратное множество систем произвольных образующих, т.е.  $P_i = \{p_1^{(i)}, p_2^{(i)}, \dots, p_j^{(i)}, \dots\}$ ,  $p_j^{(i)} \geq 2$ ,  $p_j^{(i)}$  — целые числа,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Положим

$$m_0^{(i)} = 1, \quad m_i^{(i)} = \prod_{s=1}^i p_s^{(i)}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Пусть  $\{\psi_{k_i}(x^i)\}_{k,i \in \mathbb{N}}$  есть мультипликативная система Прайса [1]. Определим обобщенную систему Уолша  $\{\psi_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x^1, x^2, \dots, x^n)\}_{k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{N}^0}$ ,  $\mathbb{N}^0 = 0, 1, 2, \dots$  на  $[0, 1]^n$  следующим равенством:

$$\psi_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x^1, x^2, \dots, x^n) = \psi_{k_1}(x^1) \cdot \dots \cdot \psi_{k_n}(x^n).$$

Обозначим через

$$E_{s_1, \dots, s_n}(f)_p = \inf_{c_{k_1, \dots, k_n}} \left\| f(x^1, \dots, x^n) - \sum_{k_1=0}^{s_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{s_n-1} c_{k_1, \dots, k_n} \psi_{k_1, \dots, k_n}(x^1, \dots, x^n) \right\|_p$$

наилучшее в метрике  $L_p[0, 1]^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  приближение функции  $f \in L_p[0, 1]^n$  полиномами по обобщенной системе Уолша  $\{\psi_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x^1, x^2, \dots, x^n)\}$ .

Пусть

$$\mathfrak{T}_{r_1, \dots, r_n}(f, (x^1, \dots, x^n)) = \sum_{k_1=0}^{r_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{r_n-1} \alpha_{k_1, \dots, k_n} \psi_{k_1, \dots, k_n}(x^1, \dots, x^n), \quad k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$$

полиномы, осуществляющие в метрике  $L_p[0, 1]^n$  наилучшее приближение функции  $f$ , т.е.

$$\left\| f(x^1, \dots, x^n) - \mathfrak{T}_{r_1, \dots, r_n}(f, (x^1, \dots, x^n)) \right\|_p = E_{r_1, \dots, r_n}(f)_p.$$

Такие полиномы существуют при всех натуральных  $r_1, \dots, r_n$ , так как

$\left\| f(x^1, \dots, x^n) - \sum_{k_1=0}^{r_1-1} \dots \sum_{k_n=0}^{r_n-1} c_{k_1, \dots, k_n} \psi_{k_1, \dots, k_n}(x^1, \dots, x^n) \right\|_p$  является непрерывной неотрицательной функцией набора коэффициентов  $c_{k_1, \dots, k_n}$ .

Обозначим через

$$\omega_p \left( f, \frac{1}{m_{v_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{m_{v_n}^{(n)}} \right) = \sup_{\substack{0 \leq h_i < 1/m_{v_i}^{(i)} \\ i=1, 2, \dots, n}} \left\| f(x^1 + h_1, \dots, x^n + h_n) - f(x^1, \dots, x^n) \right\|_p$$

модуль непрерывности функции  $f$  в метрике  $L_p[0, 1]^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Определение.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta \leq \infty$  и  $r > 0$ . Будем говорить, что  $f \in B_{\theta, p}^r(\mathfrak{T})$ , если  $f \in L_p[0, 1]^n$  и конечна величина

$$\begin{aligned} \|f; B_{\theta, p}^r(\mathfrak{T})\| &= \|f\|_p + \left\{ \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} (m_{v_1+1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n+1}^{(n)})^{r\theta} E_{m_{v_1}^{(1)}, \dots, m_{v_n}^{(n)}}^{\theta}(f)_p \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad 1 \leq \theta < \infty, \\ \|f; B_{\infty, p}^r(\mathfrak{T})\| &= \|f\|_p + \sup (m_{v_1+1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n+1}^{(n)})^r E_{m_{v_1}^{(1)}, \dots, m_{v_n}^{(n)}}(f)_p, \end{aligned} \quad (1)$$

которая является нормой.

Пространство  $B_{\theta, p}^r(\mathfrak{T})$  будем называть пространством Бесова с базисом по кратной обобщенной системе Уолша.

**Теорема 1.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$  и  $r > 0$ . Тогда для функции  $f \in B_{\theta, p}^r(\mathfrak{T})$  следующая величина:

$$\|f\|_p + \left\{ \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} (m_{v_1+1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n+1}^{(n)})^{r\theta} \omega_p \left( f, \frac{1}{m_{v_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{m_{v_n}^{(n)}} \right) \right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad (2)$$

эквивалентна норме (1).

В следующей теореме указываются эквивалентные нормировки пространства Бесова  $B_{0,p}^r(\mathfrak{Z})$  по кратной обобщенной системе Уолша, где образующая последовательность  $\{p_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $2 \leq p_j^{(i)} \leq N_i < \infty$ ,  $N_i \in \mathbb{N}$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , т.е. ограничена.

**Теорема 2.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ ,  $r > 0$  и  $\sup_j p_j^{(i)} = N_i < \infty$ ,  $i=1,2,\dots,n$ , тогда для любой функции  $f \in B_{0,p}^r(\mathfrak{Z})$  величины:

$$\|f\|_p + \left\{ \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} (m_{v_1}^{(1)} \dots m_{v_n}^{(n)})^{r\theta} E_{m_{v_1}^{(1)}, \dots, m_{v_n}^{(n)}}^{\theta}(f)_p \right\}^{\frac{1}{\theta}}, \quad (3)$$

$$\|f\|_p + \left\{ \sum_{v_1=1}^{\infty} \dots \sum_{v_n=1}^{\infty} (v_1 \dots v_n)^{r\theta-1} E_{v_1, \dots, v_n}^{\theta}(f)_p \right\}^{\frac{1}{\theta}} \quad (4)$$

также являются эквивалентными между собой и (1), (2).

Для одномерных рядов по мультипликативной системе в случае неограниченности последовательности  $\{p_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  справедлива следующая теорема, которая указывает на существенность ограниченности образующей последовательности  $\{p_j^{(i)}\}_{j=1}^{\infty}$ ,  $i=1,2,\dots,n$  в предыдущей теореме.

**Теорема 3.** Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $1 \leq \theta < \infty$ ,  $r > 0$  и пусть  $\sup_{v \in \mathbb{N}} p_v = \infty$ , тогда существует функция, для которой ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_v^{r\theta} E_{m_v}^{\theta}(f)_p$$

сходится, а ряд

$$\sum_{v=0}^{\infty} m_{v+1}^{r\theta} E_{m_v}^{\theta}(f)_p$$

расходится.

**Лемма 1.** При любом  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  для функций  $f \in L_p[0,1]^n$  справедливы неравенства

$$E_{m_1^{(1)}, \dots, m_n^{(n)}}^{\theta}(f)_p \leq \omega_p \left( f, \frac{1}{m_{r_1}^{(1)}}, \dots, \frac{1}{m_{r_n}^{(n)}} \right) \leq 2 E_{m_1^{(1)}, \dots, m_n^{(n)}}^{\theta}(f)_p. \quad (5)$$

**Доказательство.** Для простоты проведем доказательство теоремы в двумерном случае. Частные суммы ряда Фурье функции  $f(x, y)$  по системе  $\{\psi_{k_1, k_2}(x, y)\}$  имеют вид

$$S_{n_1, n_2}(f, (x, y)) = \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} c_{k_1, k_2}(f) \psi_{k_1, k_2}(x, y),$$

где

$$c_{k_1, k_2}(f) = \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) \overline{\psi_{k_1, k_2}(u, v)} du dv.$$

По свойству мультипликативной системы  $\{\psi_{k_1, k_2}(x, y)\}$  частные суммы можно записать в виде

$$\begin{aligned} S_{n_1, n_2}(f, (x, y)) &= \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) \overline{\psi_{k_1, k_2}(u, v)} \psi_{k_1, k_2}(x, y) du dv = \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \sum_{k_2=0}^{n_2-1} \psi_{k_1, k_2}(x \dot{-} u, y \dot{-} v) du dv = \int_0^1 \int_0^1 f(u, v) D_{n_1, n_2}(x \dot{-} u, y \dot{-} v) du dv, \end{aligned}$$

или, учитывая инвариантность интеграла относительно операции  $\dot{+}$ , после замены  $x \dot{-} u = t_1$ ,  $y \dot{-} v = t_2$ , откуда  $x \dot{-} t_1 = u$ ,  $y \dot{-} t_2 = v$ , получаем:

$$S_{m_1, m_2}(f, (x, y)) = \int_0^1 \int_0^1 f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2) D_{m_1, m_2}(t_1, t_2) dt_1 dt_2,$$

а на основании свойства ядра Дирихле, имеем:

$$S_{m_1, m_2}(f, (x, y)) = m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2) dt_1 dt_2. \quad (6)$$

Рассмотрим случай  $1 \leq p < \infty$ . Из (6) и, применяя обобщенное неравенство Минковского [2], получим:

$$\begin{aligned} E_{m_1, m_2}(f)_p &\leq \|f(x, y) - S_{m_1, m_2}(f, (x, y))\|_p = \\ &= \left( \int_0^1 \int_0^1 \left| f(x, y) - m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2) dt_1 dt_2 \right|^p dx dy \right)^{1/p} \leq \\ &\leq \left( \int_0^1 \int_0^1 \left[ m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)| dt_1 dt_2 \right]^p dx dy \right)^{1/p} = \\ &= m_1 m_2 \left[ \int_0^1 \int_0^1 \left( \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)| dt_1 dt_2 \right)^p dx dy \right]^{1/p} \leq \\ &\leq m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)|^p dx dy \right)^{1/p} dt_1 dt_2 \leq \\ &\leq m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} \sup_{\substack{0 \leq t_1 < 1/m_1 \\ 0 \leq t_2 < 1/m_2}} \left( \int_0^1 \int_0^1 |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)|^p dx dy \right)^{1/p} dt_1 dt_2 = \omega_p \left( f, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right). \end{aligned}$$

Если же  $p = \infty$ , то

$$\begin{aligned} E_{m_1, m_2}(f)_\infty &\leq \|f(x, y) - S_{m_1, m_2}(f, (x, y))\|_\infty = \\ &= \sup_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} |f(x, y) - S_{m_1, m_2}(f, (x, y))| = \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} |f(x, y) - S_{m_1, m_2}(f, (x, y))| \leq \\ &\leq \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \left( m_1 m_2 \int_0^{1/m_1} \int_0^{1/m_2} |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)| dt_1 dt_2 \right) \leq \\ &\leq \max_{\substack{0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1}} \sup_{\substack{0 \leq t_1 < 1/m_1 \\ 0 \leq t_2 < 1/m_2}} |f(x, y) - f(x \dot{+} t_1, y \dot{+} t_2)| = \omega_\infty \left( f, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, левая часть неравенств (5) леммы 1 установлена.

Для доказательства правой части заметим, что при  $0 \leq h_1 < 1/m_1$ ,  $0 \leq h_2 < 1/m_2$  и всех  $k_1 = 0, 1, \dots, m_1 - 1$ ,  $k_2 = 0, 1, \dots, m_2 - 1$  имеем

$$\Psi_{k_1, k_2}(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) = \Psi_{k_1, k_2}(x, y),$$

а потому

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{m_1, m_2}(f, (x, y)) &= \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \alpha_{k_1, k_2} \Psi_{k_1, k_2}(x, y) = \sum_{k_1=0}^{m_1-1} \sum_{k_2=0}^{m_2-1} \alpha_{k_1, k_2} \Psi_{k_1, k_2}(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) = \\ &= \mathfrak{I}_{m_1, m_2}(f, (x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2)). \end{aligned}$$

Учитывая это соотношение, для  $0 \leq h_1 < 1/m_1$ ,  $0 \leq h_2 < 1/m_2$ , получаем:

$$\|f(x, y) - f(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2)\|_p = \|f(x, y) - \mathfrak{I}_{m_1, m_2}(f, (x, y)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \mathfrak{I}_{m_1, m_2} \left( f, (x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) \right) - f(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) \Big\|_p \leq \left\| f(x, y) - \mathfrak{I}_{m_1, m_2} \left( f, (x, y) \right) \right\|_p + \\
& + \left\| f(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) - \mathfrak{I}_{m_1, m_2} \left( f, (x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) \right) \right\|_p = 2E_{m_2, m_1} (f)_p.
\end{aligned}$$

Отсюда находим, что

$$\omega_p \left( f, \frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_2} \right) = \sup_{\substack{0 \leq h_1 < 1/m_1 \\ 0 \leq h_2 < 1/m_2}} \left\| f(x, y) - f(x \dot{+} h_1, y \dot{+} h_2) \right\|_p \leq 2E_{m_1, m_2} (f)_p.$$

Лемма 1 доказана.

**Доказательство теоремы 1** следует из леммы 1.

**Доказательство теоремы 2.** В условиях теоремы докажем сначала эквивалентность величин (3) и (4), для простоты доказательство будем проводить в двумерном случае.

Рассмотрим случай  $r\theta - 1 > 0$ . Для случая  $r\theta - 1 \leq 0$  проводятся аналогичные вычисления.

$$\begin{aligned}
& \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} (v_1 v_2)^{r\theta-1} E_{v_1, v_2}^{\theta} (f)_p = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{v_1=m_{k_1}^{(1)}}^{m_{k_1+1}^{(1)}-1} \sum_{v_2=m_{k_2}^{(2)}}^{m_{k_2+1}^{(2)}-1} (v_1 v_2)^{r\theta-1} E_{v_1, v_2}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( m_{k_1+1}^{(1)} m_{k_2+1}^{(2)} \right)^{r\theta-1} E_{m_{k_1}^{(1)}, m_{k_2}^{(2)}}^{\theta} (f)_p \left( m_{k_1+1}^{(1)} - m_{k_1}^{(1)} \right) \left( m_{k_2+1}^{(2)} - m_{k_2}^{(2)} \right) \leq \\
& \leq \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( p_{k_1+1}^{(1)} p_{k_2+1}^{(2)} \right)^{r\theta} \left( m_{k_1}^{(1)} m_{k_2}^{(2)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1}^{(1)}, m_{k_2}^{(2)}}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq (N_1 N_2)^{r\theta} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( m_{k_1}^{(1)} m_{k_2}^{(2)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1}^{(1)}, m_{k_2}^{(2)}}^{\theta} (f)_p, \\
& \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} (v_1 v_2)^{r\theta-1} E_{v_1, v_2}^{\theta} (f)_p = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{v_1=m_{k_1}^{(1)}}^{m_{k_1+1}^{(1)}-1} \sum_{v_2=m_{k_2}^{(2)}}^{m_{k_2+1}^{(2)}-1} (v_1 v_2)^{r\theta-1} E_{v_1, v_2}^{\theta} (f)_p \geq \\
& \geq \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( m_{k_1}^{(1)} m_{k_2}^{(2)} \right)^{r\theta-1} E_{m_{k_1+1}^{(1)}, m_{k_2+1}^{(2)}}^{\theta} (f)_p \left( m_{k_1+1}^{(1)} - m_{k_1}^{(1)} \right) \left( m_{k_2+1}^{(2)} - m_{k_2}^{(2)} \right) \geq \\
& \geq \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left( m_{k_1+1}^{(1)} m_{k_2+1}^{(2)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1+1}^{(1)}, m_{k_2+1}^{(2)}}^{\theta} (f)_p \left( \frac{1}{(p_{k_1+1}^{(1)})^{r\theta-1}} - \frac{1}{(p_{k_1+1}^{(1)})^{r\theta}} \right) \left( \frac{1}{(p_{k_2+1}^{(2)})^{r\theta-1}} - \frac{1}{(p_{k_2+1}^{(2)})^{r\theta}} \right) \geq \\
& \geq (N_1 \cdot N_2)^{-r\theta} \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \left( m_{k_1}^{(1)} m_{k_2}^{(2)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1}^{(1)}, m_{k_2}^{(2)}}^{\theta} (f)_p.
\end{aligned}$$

В кратном случае, имеем неравенства

$$\begin{aligned}
& (N_1 \cdot \dots \cdot N_n)^{-r\theta} \sum_{k_1=1}^{\infty} \dots \sum_{k_n=1}^{\infty} \left( m_{k_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{k_n}^{(n)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1}^{(1)}, \dots, m_{k_n}^{(n)}}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq \sum_{v_1=1}^{\infty} \dots \sum_{v_n=1}^{\infty} (v_1 \cdot \dots \cdot v_n)^{r\theta-1} E_{v_1, \dots, v_n}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq (N_1 \cdot \dots \cdot N_n)^{r\theta} \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \left( m_{k_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{k_n}^{(n)} \right)^{r\theta} E_{m_{k_1}^{(1)}, \dots, m_{k_n}^{(n)}}^{\theta} (f)_p.
\end{aligned}$$

Эквивалентность величин (1) и (3) вытекает из того, что

$$\begin{aligned}
& \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} \left( m_{v_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n}^{(n)} \right)^{r\theta} E_{m_{v_1}^{(1)}, \dots, m_{v_n}^{(n)}}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} \left( m_{v_1+1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n+1}^{(n)} \right)^{r\theta} E_{m_{v_1+1}^{(1)}, \dots, m_{v_n+1}^{(n)}}^{\theta} (f)_p \leq \\
& \leq (N_1 \cdot \dots \cdot N_n)^{r\theta} \sum_{v_1=0}^{\infty} \dots \sum_{v_n=0}^{\infty} \left( m_{v_1}^{(1)} \cdot \dots \cdot m_{v_n}^{(n)} \right)^{r\theta} E_{m_{v_1}^{(1)}, \dots, m_{v_n}^{(n)}}^{\theta} (f)_p.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы установили эквивалентность величин (1)–(4).

Теорема 2 доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Пусть  $\sup_{v \in \mathbb{N}} p_v = \infty$ . Определим искомую функцию следующим обра-

зом

$$f_0 \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f_0) \psi_k,$$

где ее коэффициенты

$$c_k(f_0) = \begin{cases} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1}, & k \in [m_{v_i}, m_{v_i+1} - 1], \quad i \in \mathbb{N} \\ 0, & k \notin [m_{v_i}, m_{v_i+1} - 1] \end{cases}$$

и где  $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$  такая последовательность номеров, что  $\frac{m_i}{m_{v_i}} \leq \frac{1}{2^i}$ . Следовательно,

$$f_0(x) = \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x). \quad (7)$$

Покажем, что эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3. Очевидно, что так определенная функция (7) также принадлежит  $L_p[0,1]$ . Действительно,

$$\|f_0\|_p = \left\| \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \left\| \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p \leq \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} m_{v_i+1}^{1-1/p} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2},$$

где

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p &= \left( \int_0^1 |D_{m_{v_i+1}}(x) - D_{m_{v_i}}(x)|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left( \int_0^{1/m_{v_i+1}} |D_{m_{v_i+1}}(x) - D_{m_{v_i}}(x)|^p dx + \int_{1/m_{v_i+1}}^{1/m_{v_i}} |D_{m_{v_i+1}}(x) - D_{m_{v_i}}(x)|^p dx \right)^{1/p} = \\ &= \left( (m_{v_i+1} - m_{v_i})^p \frac{1}{m_{v_i+1}} - m_{v_i}^p \left( \frac{1}{m_{v_i}} - \frac{1}{m_{v_i+1}} \right) \right)^{1/p} = \\ &= \left( m_{v_i+1}^{p-1} \left( 1 - \frac{1}{p_{v_i+1}} \right)^p - m_{v_i}^p \left( \frac{1}{p_{v_i+1}^p m_{v_i}} - \frac{1}{p_{v_i+1}^p m_{v_i+1}} \right) \right)^{1/p} \asymp C m_{v_i+1}^{1-1/p}. \\ \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} E_{m_l}^{\theta}(f_0)_p &\leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \|f_0 - S_{m_l}(f_0)\|_p^{\theta} = \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left\| \sum_{k=m_l}^{\infty} c_k(f_0) \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left\| \sum_{v=l}^{\infty} \sum_{k=m_v}^{m_{v+1}-1} c_k(f_0) \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} \leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left\| \sum_{\substack{v_i \geq l, \\ i=1,2,\dots}}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} \leq \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left( \sum_{\substack{v_i \geq l, \\ i=1,2,\dots}}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \left\| \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p \right)^{\theta} \leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left( \sum_{\substack{v_i \geq l, \\ i=1,2,\dots}}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} m_{v_i+1}^{1-1/p} \right)^{\theta} \\ &\leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} \left( \sum_{\substack{i \geq l, \\ i=1,2,\dots}}^{\infty} m_{v_i+1}^{-r} \right)^{\theta} \leq \sum_{l=0}^{\infty} m_l^{r\theta} m_{v_l}^{-r\theta} \leq \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^{lr\theta}} < \infty. \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались условием выбора номеров  $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ .

Далее,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta} E_{m_l}^{\theta}(f_0)_p &\geq C \sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta} \|S_{m_{l+1}}(f_0) - S_{m_l}(f_0)\|_p^{\theta} = C \sum_{l=0}^{\infty} m_{l+1}^{r\theta} \left\| \sum_{k=m_l}^{m_{l+1}-1} c_k(f_0) \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} = \\ &= C \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{r\theta} \left\| m_{v_i+1}^{-r+1/p-1} \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} = C \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{r\theta} m_{v_i+1}^{-r\theta+\theta/p-\theta} \left\| \sum_{k=m_{v_i}}^{m_{v_i+1}-1} \psi_k(x) \right\|_p^{\theta} \geq \\ &\geq C \sum_{i=1}^{\infty} m_{v_i+1}^{r\theta} m_{v_i+1}^{-r\theta+\theta/p-\theta} m_{v_i+1}^{\theta-\theta/p} = C \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty. \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

Отметим, что пространства Бесова по мультипликативным базисам Прайса и другие эквивалентные нормы в одномерном случае рассмотрены в работе [3], в кратном случае по системе Уолша — в [4].

### Список литературы

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. Ряды и преобразования Уолша. — М.: Наука, 1987.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Никольский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975. — 480 с.
3. Смаилов Е.С., Сулейменова З.П. Теоремы вложения для пространства Бесова по мультипликативным базисам Прайса // Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова. — М., 2003. — Т. 243. — С. 313–319.
4. Игенберлина А.Е. Функциональные пространства на двоичной группе и сильная суммируемость рядов Фурье–Уолша: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Астана, 2008.

УДК 519.677:517.518

Р.Ж.Толеханова

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А.Букетова

### АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ ИЗОБРАЖЕНИЙ В БАЗИСЕ УОЛША

*Мақалада ақпаратты цифрлік түрде өңдеу кезіндегі Уолш функцияларын қолданудың кейбір талдау әдістері қарастырылды. Жазықтықтағы бейнеленетін сигналдарды қалпына келтіргенде Уолш коэффициенттерінің ерекшеліктері көрсетілді.*

*In this article were showed some analytic methods of applications Walsh's functions to digital machining including during the restoration initial fragments of the picture signals on the plane. The coefficients of Walsh's transformations were also displayed.*

В базисе систем Уолша в 80–90-х годах XX в. рассматривались передача сигналов по каналам радиосвязи, работа радарных установок, передача телефонных сигналов по общему кабелю, кодирование сигналов. Современные возможности цифровых технологий позволяют решать эти задачи особенно эффективно. При решении вместе с математическим аппаратом используются методы синтеза, преобразования и кодирования сигналов.

По аналитической форме описания сигнала составляется математическая модель процесса, который с физической точки зрения может быть охарактеризован законами изменения напряженности электромагнитного поля, звукового давления, напряжения или тока в цепи, отклонения светового луча на экране и т.п. Чаще всего сигналы рассматривают как функции, заданные в определённых физических координатах. В этом смысле различают одномерные (например, зависящие от времени), двумерные, заданные на плоскости (примером могут служить различного рода изображения), трёхмерные (характеризующие, например, пространственные объекты) сигналы. Математически такие сигнала-