УДК 517.62

Об осуществимости и сходимости одного алгоритма методом параметризации

On a practicability and convergence of the algorithm of parametrization's method

Джумабаев Д.С., Темешева С.М.

Институт математики МОН РК, Алматы (e-mail: dzhumabaev@list.ru)

Мақалада параметрлеу әдісі негізінде параметрінен үздіксіз тәуелді қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін бейсызық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің шешімі бар болуының мәселелері қарастырылған. Зерттеліп отырған есептің жуық шешімін табу алгоритмі тұрғызылған. Бастапқы берілімдер терминдерінде ұсынылған алгоритмдердің жүзеге асуының, жинақтылығының, сонымен бірге қарапайым дифференциалдық теңдеулер үшін бейсызық екі нүктелі шеттік есептер әулетінің оқшауланған шешімінің бар болуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттары тағайындалған.

In the work on base of the parameterization's method questions of existence of the solving the family of nonlinear two points boundary value problems are researched for ordinary differential equations, continuously depending from parameter of family. The algorithm of finding of approaching solution is constructed of the investigating problem. In term of the initial date are received sufficient conditions practicability, convergence of the offered algorithm, simultaneously providing existence of the isolated solution of family nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations.

На $\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ рассматривается нелинейная краевая задача

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,v), \qquad v\in R^n, \tag{1}$$

$$g\big(x,v(x,0),v(x,T)\big)=0, \qquad x\in[0,\omega], \tag{2}$$

где $f:\overline{\Omega}\times R^n\to R^n$, $g:[0,\omega]\times R^n\times R^n\to R^n$ непрерывны, $\|v(x,t)\|=\max\limits_{i=1:n}\|v_i(x,t)\|$, x — параметр семейства.

Через $C(\overline{\Omega},R^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $v:\overline{\Omega}\to R^n$ с нормой $\|v\|_1=\max\limits_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\|v(x,t)\|$.

Решением задачи (1), (2) называется непрерывно дифференцируемая по t на $\overline{\Omega}$ функция $v^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению (1) и краевым условиям (2).

При каждом фиксированном $x\in[0,\omega]$ задача (1), (2) является нелинейной двухточечной краевой задачей для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которая исследована в [1] методом параметризации.

При изменении x на отрезке $[0,\omega]$ получим семейство нелинейных двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

В настоящей работе методом параметризации исследуются вопросы существования решения задачи (1), (2), непрерывно зависящего от параметра семейства $x\in[0,\omega]$, и построения алгоритмов нахождения ее приближенного решения.

Изучение семейства краевых задач представляет самостоятельный интерес и находит применение в теории нелокальных краевых задач для систем гиперболических уравнений со смешанной производной [2].

Задачу (1), (2) исследуем методом параметризации [1].

По некоторому шагу $h>0: Nh=T$ $(N=1,2,3,...)$ произведем разбиение: $[0,\omega]\times[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}\Omega_r$, где $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh)$, $r=1:N$.

Обозначим через $C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$ пространство систем функций $v(x,[t])=\big(v_1(x,t), v_2(x,t),...,v_N(x,t)\big)$ с нормой $\|v\|_2=\max\limits_{r=1:N}\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_r}\|v_r(x,t)\|$, где функция $v_r:\Omega_r\to R^n$ непрерывна и равномерно относительно $x \in [0,\omega]$ имеет конечный предел при $t \to rh-0$, $r=1:N$. Пространство $C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$ является полным.

Сужение функции $v(x,t)$ на Ω_r обозначим через $v_r(x,t)$, т.е. $v_r(x,t)$ является функцией определенной и совпадающей с $v(x,t)$ на Ω_r, $r=1:N$, и от задачи (1), (2) перейдем к следующей эквивалентной задаче:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} = f(x,t,v_r), \qquad (x,t)\in\Omega_r, \quad v_r \in R^n, \tag{3}$$

$$g\left(x, v_1(x,0), \lim_{t\to Nh-0} v_N(x,t)\right) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \tag{4}$$

$$\lim_{t\to sh-0} v_s(x,t) = v_{s+1}(x,sh), \qquad s=1:(N-1), \quad x\in[0,\omega], \tag{5}$$

где (5) — условия склеивания решения на внутренних линиях разбиения $t=(s-1)h$, $s=1:(N-1)$.

Решением задачи (3)–(5) является система функций $v^*(x,[t]) = \left(v_1^*(x,t), v_2^*(x,t),\dots,v_N^*(x,t)\right) \in$ $\in C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$, где непрерывно дифференцируемая по t функция $v_r^*(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (3) при всех $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, и для $v_1^*(x,0)$, $\lim\limits_{t\to Nh-0} v_N^*(x,t)$, $\lim\limits_{t\to sh-0} v_s^*(x,t)$, $v_{s+1}^*(x,sh)$, $s=1:(N-1)$, $x\in[0,\omega]$, имеют место равенства (4), (5).

Введем параметр $\lambda_r(x) = v_r(x,(r-1)h)$, $x\in[0,\omega]$ и произведем замену $\tilde{v}_r(x,t) = v_r(x,t) - \lambda_r(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$. Получим краевую задачу с функциональными параметрами:

$$\frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial t} = f(x,t,\lambda_r(x)+\tilde{v}_r), \qquad (x,t)\in\Omega_r, \qquad r=1:N, \tag{6}$$

$$\tilde{v}_r(x,(r-1)h) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \quad r=1:N, \tag{7}$$

$$g\left(x, \lambda_1(x), \lambda_N(x) + \lim_{t\to Nh-0} \tilde{v}_N(x,t)\right) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \tag{8}$$

$$\lambda_s(x) + \lim_{t\to sh-0} \tilde{v}_s(x,t) - \lambda_{s+1}(x) = 0, \qquad x\in[0,\omega], \quad s=1:(N-1). \tag{9}$$

Через $C([0,\omega],R^{nN})$ обозначим множество функций $\lambda(x) = \left(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_N(x)\right)$, где $\lambda_r:[0,\omega]\to R^n$, $r=1:N$, непрерывны.

Решением задачи (6)–(9) является пара $\left(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t])\right)$ с компонентами

$$\lambda^*(x) = (\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\dots,\lambda_N^*(x)) \in C([0,\omega],R^{nN}),$$

$$\tilde{v}^*(x,[t]) = (\tilde{v}_1^*(x,t),\tilde{v}_2^*(x,t),\dots,\tilde{v}_N^*(x,t)) \in C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN}),$$

где непрерывно дифференцируемая на Ω_r функция $\tilde{v}_r^*(x,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению (6) при всех $(x,t)\in\Omega_r$ (при $t=(r-1)h$ уравнению (6) удовлетворяет правосторонняя производная функции $\tilde{v}_r^*(x,t)$), $r=1:N$, выполняется начальное условие $\tilde{v}_r^*(x,(r-1)h)=0$, $r=1:N$, и для $\lambda_1^*(x)$, $\lambda_N^*(x) + \lim\limits_{t\to Nh-0} \tilde{v}_N^*(x,t)$, $\lambda_s^*(x) + \lim\limits_{t\to sh-0} \tilde{v}_s^*(x,t)$, $\lambda_{s+1}^*(x)$, $x\in[0,\omega]$, $s=1:(N-1)$, имеют место равенства (8), (9).

Если $v^*(x,t)$ — решение задачи (1), (2), то система пар $\left(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t])\right)$, где

$$\lambda^*(x) = \left(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_N^*(x)\right) \in R^{nN}, \ x\in[0,\omega], \ \lambda_r^*(x) = v_r^*(x,(r-1)h), \ r=1:N,$$

$$\tilde{v}^*(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^*(x,t),\tilde{v}_2^*(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^*(x,t)\right), \ \tilde{v}_r^*(x,t) = v_r^*(x,t) - v_r^*(x,(r-1)h), \ (x,t)\in\Omega_r, \ r=1:N,$$

$v_r^*(x,t)$ — сужение функции $v^*(x,t)$ на Ω_r, $r=1:N$, является решением краевой задачи (6)–(9). И обратно — если пара $\left(\tilde{\lambda}(x), \tilde{\tilde{v}}(x,[t])\right)$ является решением задачи с функциональными параметрами (6)–(9), то функция $\tilde{v}(x,t)$, определенная на $\overline{\Omega}$ равенствами: $\tilde{v}(x,t) = \tilde{\lambda}_r(x) + \tilde{\tilde{v}}_r(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, $\tilde{v}(x,T) = \tilde{\lambda}_N(x) + \lim\limits_{t\to Nh-0} \tilde{\tilde{v}}_N(x,t)$, будет решением нелинейной краевой задачи (1), (2).

Задача с функциональными параметрами (6)–(9) отличается от задачи (3)–(5) наличием начальных условий (7).

При фиксированном $\lambda_r(x)$, $x\in[0,\omega]$, задача Коши (6), (7) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tilde{v}_r(x,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r(x)+\tilde{v}_r(x,\tau)\right)d\tau, \qquad (x,t)\in\Omega_r, \quad r=1:N,$$

откуда, определив $\lim\limits_{t\to rh-0}\tilde{v}_r(x,t)$, $x\in[0,\omega]$, $r=1:N$, подставив в (8), (9), предварительно умножая (8) на $h>0: Nh=T$, получим систему уравнений относительно функциональных параметров $\lambda_r(x)$, $x\in[0,\omega]$:

$$h\cdot g\left(x,\lambda_1(x),\lambda_N(x)+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f\left(x,t,\lambda_N(x)+\tilde{v}_N(x,t)\right)dt\right)=0,$$

$$\lambda_s(x)+\int\limits_{(s-1)h}^{sh} f\left(x,t,\lambda_s(x)+\tilde{v}_s(x,t)\right)dt-\lambda_{s+1}(x)=0, \quad s=1:(N-1),$$

которую запишем в виде

$$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})=0, \qquad \lambda(x)\in C([0,\omega],R^{nN}). \tag{11}$$

Условие А. Существует $h>0: Nh=T$ $(N=1,2,3,\dots)$, при котором нелинейное уравнение $Q_{1,h}(x,\lambda(x),0)=0$ имеет решение $\lambda^{(0)}(x)=\left(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),\dots,\lambda_N^{(0)}(x)\right)\in C([0,\omega],R^{nN})$, система функций $\tilde{v}^{(0)}(x,[t])=\left(\tilde{v}_1^{(0)}(x,t),\ \tilde{v}_2^{(0)}(x,t),\dots,\tilde{v}_N^{(0)}(x,t)\right)$ с компонентами $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(0)}(x)\right)d\tau$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, принадлежит пространству $C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$.

По паре $\left(\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}(x,[t])\right)$ равенствами $v^{(0)}(x,t)=\lambda_r^{(0)}+\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, $v^{(0)}(x,T)=\lambda_N^{(0)}+\lim\limits_{t\to Nh-0}\tilde{v}_N^{(0)}(x,t)$, $x\in[0,\omega]$, определим на $\overline{\Omega}$ кусочно-непрерывную функцию $v^{(0)}(x,t)$.

Выберем функции $\rho_\lambda(x)>0$, $\rho_{\tilde{v}}(x)>0$, $\rho_v(x)>0$, непрерывные на $[0,\omega]$, и составим множества:

$$S\left(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x)\right)=$$
$$=\left\{\lambda(x)=\left(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_N(x)\right)\in C([0,\omega],R^{nN}):\left\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|=\max_{r=1:N}\left\|\lambda_r(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|<\rho_\lambda(x)\right\};$$

$$S_h\left(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x)\right)=\left\{\tilde{v}(x,[t])=\left(\tilde{v}_1(x,t),\tilde{v}_2(x,t),\dots,\tilde{v}_N(x,t)\right)\in C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN}):\ \left\|\ \tilde{v}-\tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2<\rho_{\tilde{v}}(x)\right\};$$

$$S\left(v^{(0)}(x,t),\rho_v(x)\right)=\left\{v(x,t)\in C(\overline{\Omega},R^n):\max_{t\in[0,T]}\left\|\ v(x,t)-v^{(0)}(x,t)\ \right\|<\rho_v(x)\right\};$$

$$G_1^0\left(x,\rho_v(x)\right)=\left\{(x,t,v)\in\overline{\Omega}\times R^n:\ (x,t)\in\overline{\Omega},\ \left\|\ v-v^{(0)}(x,t)\ \right\|<\rho_v(x)\right\};$$

$$G_2^0\left(x,\rho_\lambda(x),\rho_v(x)\right)=\left\{(x,w_1,w_2)\in[0,\omega]\times R^{2n}: x\in[0,\omega],\left\|\ w_1-v^{(0)}(x,0)\ \right\|<\rho_\lambda(x);\right.$$
$$\left.\left\|\ w_2-v^{(0)}(x,T)\ \right\|<\rho_v(x)\right\}.$$

Условие В. Функции $f(x,t,v)$, $g(x,w_1,w_2)$ соответственно в $G_1^0\left(x,\rho_v(x)\right)$, $G_2^0\left(x,\rho_\lambda(x),\rho_v(x)\right)$ непрерывны, имеют равномерно непрерывные частные производные $f_v'(x,t,v)$, $g_{w_1}'(x,w_1,w_2)$, $g_{w_2}'(x,w_1,w_2)$, и выполняются неравенства $\left\|f_v'(x,t,v)\right\|\le L_0$, $\left\|g_{w_1}'(x,w_1,w_2)\right\|\le L_1$, $\left\|g_{w_2}'(x,w_1,w_2)\right\|\le L_2$, где L_0, L_1, L_2 — постоянные.

Пусть выполнено условие **А**. За начальное приближение решения задачи с функциональными параметрами (6)–(9) взяв пару $\left(\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}(x,[t])\right)$, найдем последовательность $\left(\lambda^{(k)}(x),\tilde{v}^{(k)}(x,[t])\right)$, $k=1,2,\dots$, по следующему алгоритму.

Шаг 1. a) Решая уравнение $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})=0$, $x\in[0,\omega]$, найдем параметр $\lambda^{(1)}(x)=\left(\lambda_1^{(1)}(x),\lambda_2^{(1)}(x),\ldots,\lambda_N^{(1)}(x)\right)\in C([0,\omega],R^{nN})$. b) Компоненты системы функций $\tilde{v}^{(1)}(x,[t])=$ $=\left(\tilde{v}_1^{(1)}(x,t),\tilde{v}_2^{(1)}(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^{(1)}(x,t)\right)$ определим по формуле

$$\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)=\int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(1)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right)d\tau,\qquad (x,t)\in\Omega_r,\ r=1:N. \tag{12}$$

Шаг 2. a) Решая уравнение $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(1)})=0$, $x\in[0,\omega]$, найдем параметр $\lambda^{(2)}(x)=\left(\lambda_1^{(2)}(x),\lambda_2^{(2)}(x),\ldots,\lambda_N^{(2)}(x)\right)\in C([0,\omega],R^{nN})$. b) Компоненты системы функций $\tilde{v}^{(2)}(x,[t])=$ $=\left(\tilde{v}_1^{(2)}(x,t),\tilde{v}_2^{(2)}(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^{(2)}(x,t)\right)$ определим по формуле

$$\tilde{v}_r^{(2)}(x,t)=\int_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(2)}(x)+\tilde{v}_r^{(1)}(x,\tau)\right)d\tau,\ (x,t)\in\Omega_r,\ r=1:N.$$

И так далее.

Достаточные условия осуществимости, сходимости предложенного алгоритма, одновременно обеспечивающие существование изолированного решения краевой задачи с функциональными параметрами (6)–(9), устанавливает

Теорема 1. Пусть существуют $h>0:Nh=T$ $(N=1,2,\ldots)$, непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\rho_\lambda(x)>0$, $\rho_{\tilde{v}}(x)>0$, $\rho_v(x)>0$, при которых выполняются условия **A**, **B**, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})}{\partial\lambda}:R^{nN}\to R^{nN}$ обратима для всех $(x,\lambda(x),\tilde{v}(x,[t]))\in[0,\omega]\times S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times$ $\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$ и имеют место неравенства:

1) $\left\|\left(\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\|\le\gamma_{1,h}(x)$; 2) $q_{1,h}(x)=hL_0(1+\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0)<1$;

3) $\gamma_{1,h}(x)\left(\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)})\right\|+\dfrac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2\right)<\rho_\lambda(x)$;

4) $\dfrac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\left\|\ \tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2<\rho_{\tilde{v}}(x)$; 5) $\rho_\lambda(x)+\rho_{\tilde{v}}(x)<\rho_v(x)$.

Тогда определяемая по алгоритму последовательность пар $(\lambda^{(k)}(x),\tilde{v}^{(k)}(x,[t]))$, $k=1,2,\ldots$, принадлежит $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$, сходится к $(\lambda^*(x),\tilde{v}^*(x,[t]))$ — изолированному решению задачи с функциональными параметрами (6)–(9) в $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$ и справедливы оценки:

$$\left\|\tilde{v}^*-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2\le\frac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\left\|\ \tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2, \tag{13}$$

$$\left\|\lambda^*(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|\le\frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2. \tag{14}$$

Доказательство. Для любых $(\lambda(x),\tilde{v}(x,[t]))\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$, где $\lambda(x)=\left(\lambda_1(x),\ldots,\lambda_N(x)\right)$, $v(x,[t])=\left(v_1(x,t),\ldots,v_N(x,t)\right)$, имеют место неравенства

$$\left\|\ \lambda_r(x)+\tilde{v}_r(x,t)-\lambda_r^{(0)}(x)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\ \right\|\le\left\|\ \lambda_r(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\ \right\|+\left\|\ \tilde{v}_r(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\ \right\|\le$$
$$\le\left\|\ \lambda(x)-\lambda^{(0)}(x)\ \right\|+\left\|\ \tilde{v}-\tilde{v}^{(0)}\ \right\|_2<\rho_\lambda(x)+\rho_{\tilde{v}}(x).$$

Поэтому, в силу условия 5) теоремы, для всех $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, тройка $(x,t,\lambda_r(x)+\tilde{v}_r(x,t))$ принадлежит множеству $G_1^0\left(x,\rho_v(x)\right)$.

Решение задачи с функциональными параметрами (6)–(9) найдем по алгоритму.

Оператор $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})$ в шаре $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))$ удовлетворяет следующим условиям:

i) матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda}$, в силу условия **B**, равномерно непрерывна в $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))$,

ii) существует $\left(\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda}\right)^{-1}$ и выполняется неравенство $\left\|\left(\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\right\| \le \gamma_{1,h}(x)$,

iii) из условия 3) теоремы следует, что $\gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)})\right\| < \rho_\lambda(x)$, т.е. все условия усиления локального варианта теоремы Адамара [1; 41] выполнены.

Возьмем некоторую функцию $\varepsilon_0(x) > 0$, $\varepsilon_0(x) \in C[0,\omega]$ такую, что будут выполняться неравенства:

$$\varepsilon_0(x)\gamma_{1,h}(x) \le \frac{1}{2},\ \frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-\varepsilon_0(x)\gamma_{1,h}(x)}\left(\| \ Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}) \ \| + \frac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\| \ \tilde{v}^{(0)} \ \|_2\right) < \rho_\lambda(x). \quad (15)$$

Так как имеет место i), то найдется непрерывная на $[0,\omega]$ функция $\delta_0(x) \in (0,\rho_\lambda(x)]$ такая, что для любых $\lambda(x),\tilde{\lambda}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))$ будет выполняться неравенство $\left\|\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda}\right\| < \varepsilon_0(x)$ как только $\left\|\lambda(x)-\tilde{\lambda}(x)\right\| < \delta_0(x)$.

Выберем $\alpha \ge \alpha_0 = \max\left\{1, \max\limits_{x\in[0,\omega]}\dfrac{\gamma_{1,h}(x)}{\delta_0(x)}\left(\| \ Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}) \ \| + \dfrac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\| \ \tilde{v}^{(0)} \ \|_2\right)\right\}$

и построим итерационный процесс $\lambda^{(1,0)}(x) = \lambda^{(0)}(x)$,

$$\lambda^{(1,m+1)}(x) = \lambda^{(1,m)}(x) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda^{(1,m)}(x),\tilde{v}^{(0)})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\cdot Q_{1,h}(x,\lambda^{(1,m)}(x),\tilde{v}^{(0)}), \quad m = 0,1,2,\ldots,$$

который в силу i)-iii) сходится к $\lambda^{(1)}(x) \in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))$ — изолированному решению уравнения $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v}^{(0)}) = 0$ и

$$\left\|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\| \le \gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)})\right\|. \quad (16)$$

В силу условия **A** параметр $\lambda^{(0)}(x) \in C([0,\omega],R^{nN})$ удовлетворяет уравнению $Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),0) = 0$, поэтому

$$\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)})\right\| = \left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde{v}^{(0)}) - Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),0)\right\| \le \max\left\{h\cdot\max_{x\in[0,\omega]}\left\|g\left(x,\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_N^{(0)}(x) + \right.\right.\right.$$

$$\left.+\int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f\left(x,t,\lambda_N^{(0)}(x)+\tilde{v}_N^{(0)}(x,t)\right)dt\right) - g\left(x,\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_N^{(0)}(x) + \int\limits_{(N-1)h}^{Nh} f\left(x,t,\lambda_N^{(0)}(x)\right)dt\right)\Bigg\|,$$

$$\max_{s=1:(N-1)}\left\|\int\limits_{(s-1)h}^{sh} f\left(x,t,\lambda_s^{(0)}(x)+\tilde{v}_s^{(0)}(x,t)\right)dt - \int\limits_{(s-1)h}^{sh} f\left(x,t,\lambda_s^{(0)}(x)\right)dt\right\|\Bigg\} \le \max\{1,hL_2\}hL_0\| \ \tilde{v}^{(0)} \ \|_2. \quad (17)$$

Компоненты системы функций $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^{(1)}(x,t),\tilde{v}_2^{(1)}(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^{(1)}(x,t)\right)$ определим по формуле (12). Тогда, учитывая (17), получим, что

$$\left\|\tilde{v}_r^{(1)}(x,t)-\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)\right\| = \left\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(1)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right)d\tau - \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(0)}(x)\right)d\tau\right\| \le$$

$$\le \int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0\left(\left\|\lambda_r^{(1)}(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\| + \left\|\tilde{v}_r^{(0)}(x,\tau)\right\|\right)d\tau \le hL_0\left\|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\| + hL_0\left\|\tilde{v}^{(0)}\right\|_2 \le$$

$$\le hL_0\left(\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0+1\right)\| \ \tilde{v}^{(0)} \ \|_2,\ (x,t)\in\Omega_r,\ r = 1:N,$$

т.е.

$$\left\|\tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\right\|_2 \le q_{1,h}(x)\left\|\tilde v^{(0)}\right\|_2, \qquad x\in[0,\omega], \tag{18}$$

и, в силу неравенства 4) теоремы, $\tilde v^{(1)}(x,[t])\in S_h(\tilde v^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde v}(x))$.

Из структуры оператора $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde v)$ и равенства $Q_{1,h}(x,\lambda^{(1)}(x),\tilde v^{(0)})=0$ имеем, что

$$\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(1)}(x),\tilde v^{(1)})\right\|=\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(1)}(x),\tilde v^{(1)})-Q_{1,h}(x,\lambda^{(1)}(x),\tilde v^{(0)})\right\|\le \max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2. \tag{19}$$

Если $\lambda(x)\in S(\lambda^{(1)}(x),\rho_1(x)+\varepsilon_1(x))$, где $\rho_1(x)=\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2$, и функция $\varepsilon_1(x)>0$ ($\varepsilon_1(x)\in C[0,\omega]$) удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon_1(x)+\ \gamma_{1,h}(x)\left(\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde v^{(0)})\right\|+\frac{q_{1,h}(x)}{1-q_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(0)}\ \right\|_2\right)<\rho_\lambda(x), \tag{20}$$

то в силу условий 2), 3) теоремы и соотношений (16), (18), (20) получим, что

$$\left\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|\le\left\|\lambda(x)-\lambda^{(1)}(x)\right\|+\left\|\lambda^{(1)}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|<\rho_1(x)+\varepsilon_1(x)+\ \gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde v^{(0)})\right\|=$$

$$=\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2+\varepsilon_1(x)+\gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde v^{(0)})\right\|\le$$

$$\le q_{1,h}(x)\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(0)}\ \right\|_2+\varepsilon_1(x)+\gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\tilde v^{(0)})\right\|\le\rho_\lambda(x),$$

следовательно, $S(\lambda^{(1)}(x),\rho_1(x)+\varepsilon_1(x))\subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))$.

Оператор $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde v^{(1)})$ в множестве $S(\lambda^{(1)}(x),\rho_1(x)+\varepsilon_1(x))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [1; 41], поэтому итерационный процесс $\lambda^{(2,0)}(x)=\lambda^{(1)}(x)$,

$$\lambda^{(2,m+1)}(x)=\lambda^{(2,m)}(x)-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda^{(2,m)}(x),\tilde v^{(1)})}{\partial\lambda}\right)^{-1}Q_{1,h}(x,\lambda^{(2,m)}(x),\tilde v^{(1)}),\quad m=0,1,2,\ldots,$$

сходится к изолированному решению $\lambda^{(2)}(x)\in S(\lambda^{(1)}(x),\rho_1(x)+\varepsilon_1(x))$ уравнения $Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde v^{(1)})=0$ и имеет место оценка $\left\|\lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\right\|\le\gamma_{1,h}(x)\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(1)}(x),\tilde v^{(1)})\right\|$ и, в силу справедливости (19), получим, что

$$\left\|\lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\right\|\le\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2. \tag{21}$$

По $\lambda^{(2)}(x)=(\lambda_1^{(2)},\lambda_2^{(2)},\ldots,\lambda_N^{(2)})\in C([0,\omega],R^{nN})$, используя формулу $\tilde v_r^{(2)}(x,t)=$ $=\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(2)}(x)+\tilde v_r^{(1)}(x,\tau)\right)d\tau$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, определим компоненты системы функций: $\tilde v^{(2)}(x,[t])=\left(\tilde v_1^{(2)}(x,t),\tilde v_2^{(2)}(x,t),\ldots,\tilde v_N^{(2)}(x,t)\right)$. Тогда для всех $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, справедливы неравенства

$$\left\|\tilde v_r^{(2)}(x,t)-\tilde v_r^{(1)}(x,t)\right\|=\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(2)}(x)+\tilde v_r^{(1)}(x,\tau)\right)d\tau-\int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x,\tau,\lambda_r^{(1)}(x)+\tilde v_r^{(0)}(x,\tau)\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le\int\limits_{(r-1)h}^{t} L_0\left(\left\|\lambda_r^{(2)}(x)-\lambda_r^{(1)}(x)\right\|+\left\|\tilde v_r^{(1)}(x,\tau)-\tilde v_r^{(0)}(x,\tau)\right\|\right)d\tau\le hL_0\left(\left\|\ \lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\ \right\|+\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2\right).$$

Таким образом, имеет место оценка

$$\left\|\tilde v^{(2)}-\tilde v^{(1)}\right\|_2\le hL_0\left(\left\|\ \lambda^{(2)}(x)-\lambda^{(1)}(x)\ \right\|+\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2\right),$$

откуда, учитывая (21), получим основное неравенство:

$$\left\|\tilde v^{(2)}-\tilde v^{(1)}\right\|_2\le hL_0\left(\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0+1\right)\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2=q_{1,h}(x)\left\|\ \tilde v^{(1)}-\tilde v^{(0)}\ \right\|_2,$$

т.е. $\tilde v^{(2)}(x,[t])\in S_h(\tilde v^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde v}(x))$.

Предполагая, что пара $(\lambda^{(k-1)}(x),\tilde v^{(k-1)}(x,[t]))\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times S(\tilde v^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde v}(x))$, $x\in[0,\omega]$, найдена и установлены оценки

$$\left\|\lambda^{(k-1)}(x)-\lambda^{(k-2)}(x)\right\|\le\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\left\|\ \tilde v^{(k-2)}-\tilde v^{(k-3)}\ \right\|_2, \tag{22}$$

$$\| \tilde{v}^{(k-1)} - \tilde{v}^{(k-2)} \|_2 \le q_{1,h}(x) \| \tilde{v}^{(k-2)} - \tilde{v}^{(k-3)} \|_2, \tag{23}$$

$$\left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(k-2)}(x), \tilde{v}^{(k-2)}) \right\| \le \max\{1, hL_2\} hL_0 \| \tilde{v}^{(k-2)} - \tilde{v}^{(k-3)} \|_2, \tag{24}$$

k -е приближение по параметру $\lambda^{(k)}(x)$ найдем, решая уравнение

$$Q_{1,h}(x, \lambda(x), \tilde{v}^{(k-1)}) = 0, \qquad \lambda(x) \in C([0,\omega], R^{nN}). \tag{25}$$

Используя то, что $Q_{1,h}(x, \lambda^{(k-1)}(x), \tilde{v}^{(k-2)}) = 0$, установим справедливость неравенства

$$\left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(k-1)}(x), \tilde{v}^{(k-1)}) \right\| \le \max\{1, hL_2\} hL_0 \left\| \tilde{v}^{(k-1)} - \tilde{v}^{(k-2)} \right\|_2. \tag{26}$$

Возьмем $\rho_{k-1}(x) = \gamma_{1,h}(x) \max\{1, hL_2\} hL_0 \left\| \tilde{v}^{(k-1)} - \tilde{v}^{(k-2)} \right\|_2$ и покажем, что $S(\lambda^{(k-1)}(x), \rho_{k-1}(x) + \varepsilon_1(x)) \subset$ $\subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda(x))$. Действительно, для любого $\lambda(x) \in S(\lambda^{(k-1)}(x), \rho_{k-1}(x) + \varepsilon_1(x))$, ввиду справедливости неравенств (15), (16), (18), (22), (23), (26), выполняется следующее:

$$\left\| \lambda(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| \le \left\| \lambda(x) - \lambda^{(k-1)}(x) \right\| + \left\| \lambda^{(k-1)}(x) - \lambda^{(k-2)}(x) \right\| + \ldots + \left\| \lambda^{(2)}(x) - \lambda^{(1)}(x) \right\| + \left\| \lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| <$$

$$< \rho_{k-1}(x) + \varepsilon_1(x) + \gamma_{1,h}(x) \max\{1, hL_2\} hL_0 \left(\| \tilde{v}^{(k-2)} - \tilde{v}^{(k-3)} \|_2 + \ldots + \| \tilde{v}^{(1)} - \tilde{v}^{(0)} \|_2 \right) + \left\| \lambda^{(1)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| \le$$

$$\le \gamma_{1,h}(x) \max\{1, hL_2\} hL_0 \left((q_{1,h}(x))^{k-1} + (q_{1,h}(x))^{k-2} + \ldots + q_{1,h}(x) \right) \| \tilde{v}^{(0)} \|_2 + \varepsilon_1(x) +$$

$$+ \gamma_{1,h}(x) \left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{v}^{(0)}) \right\| < \frac{q_{1,h}(x)}{1 - q_{1,h}(x)} \gamma_{1,h}(x) \max\{1, hL_2\} hL_0 \| \tilde{v}^{(0)} \|_2 + \varepsilon_1(x) +$$

$$+ \gamma_{1,h}(x) \left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(0)}(x), \tilde{v}^{(0)}) \right\| < \rho_\lambda(x).$$

следовательно, $S(\lambda^{(k-1)}(x), \rho_{k-1}(x) + \varepsilon_1(x)) \subset S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda(x))$.

Оператор $Q_{1,h}(x, \lambda(x), \tilde{v}^{(k-1)})$ в $S(\lambda^{(k-1)}(x), \rho_{k-1}(x) + \varepsilon_1(x))$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1 [1; 41], поэтому в этом шаре существует решение $\lambda^{(k)}(x)$ уравнения (25) и справедлива оценка

$$\left\| \lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x) \right\| \le \gamma_{1,h}(x) \left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(k-1)}(x), \tilde{v}^{(k-1)}) \right\|. \tag{27}$$

По найденному $\lambda^{(k)}(x) = (\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}, \ldots, \lambda_N^{(k)}) \in C([0,\omega], R^{nN})$, используя формулу

$$\tilde{v}_r^{(k)}(x,t) = \int\limits_{(r-1)h}^{t} f\left(x, \tau, \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k-1)}(x,\tau)\right) d\tau, \qquad (x,t) \in \Omega_r,\ r = 1:N,$$

определим компоненты системы функций $\tilde{v}^{(k)}(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^{(k)}(x,t), \tilde{v}_2^{(k)}(x,t), \ldots, \tilde{v}_N^{(k)}(x,t) \right)$ и установим для всех $(x,t) \in \Omega_r$, $r = 1:N$, оценки:

$$\| \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(k-1)} \|_2 \le q_{1,h}(x) \| \tilde{v}^{(k-1)} - \tilde{v}^{(k-2)} \|_2. \tag{28}$$

Если $\rho_k(x) = \gamma_{1,h}(x) \left\| Q_{1,h}(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}) \right\| = 0$, то $Q_{1,h}(x, \lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}) = 0$, т.е. пара $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t])$, $x \in [0,\omega]$, является решением задачи с функциональными параметрами (6)–(9).

Используя (26), (27), установим, что

$$\left\| \lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(k-1)}(x) \right\| \le \gamma_{1,h}(x) \max\{1, hL_2\} hL_0 \| \tilde{v}^{(k-1)} - \tilde{v}^{(k-2)} \|_2. \tag{29}$$

Из (28), (29) и условия 2) теоремы следует, что последовательность пар $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t])$, $k = 1,2,\ldots$, при $k \to \infty$ сходится к решению $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t])$ задачи с функциональными параметрами (6)–(9), причем, в силу неравенств 4), 5) теоремы, пары $(\lambda^{(k)}(x), \tilde{v}^{(k)}(x,[t])$, $k = 1,2,\ldots$, и $(\lambda^*(x), \tilde{v}^*(x,[t])$ принадлежат $S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda(x)) \times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho_{\tilde{v}}(x))$.

Ввиду (28), (29) легко показать, что при всех $k = 1,2,\ldots$

$$\left\| \tilde{v}^{(k)} - \tilde{v}^{(0)} \right\|_2 \le \frac{q_{1,h}(x)}{1 - q_{1,h}(x)} \| \tilde{v}^{(0)} \|_2, \tag{30}$$

$$\left\| \lambda^{(k)}(x) - \lambda^{(0)}(x) \right\| \le \frac{\gamma_{1,h}(x)}{1 - q_{1,h}(x)} \max\{1, hL_2\} hL_0 \| \tilde{v}^{(0)} \|_2. \tag{31}$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в неравенствах (30), (31), получим оценки (13) и (14) теоремы.

Покажем изолированность решения задачи с функциональными параметрами. Пусть пара $(\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}}(x,[t])$ — решение задачи (6)–(9) в $S(\lambda^{(0)}(x),\rho_{\lambda}(x))\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$. Тогда найдутся непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\delta_1(x)>0$, $\delta_2(x)>0$ такие, что $\left\|\tilde{\lambda}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|+\delta_1(x)<\rho_{\lambda}(x)$, $\left\|\tilde{\tilde{v}}-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2+\delta_2(x)<\rho_{\tilde{v}}(x)$. Легко показать, что $S(\tilde{\lambda}(x),\delta_1(x))\subset S(\lambda^{(0)}(x),\rho_{\lambda}(x))$, $S_h(\tilde{\tilde{v}}(x,[t]),\delta_2(x))\subset$ $\subset S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$. Действительно, если $\lambda(x)\in S(\tilde{\lambda}(x),\delta_1(x))$, $\tilde{v}(x,[t])\in S_h(\tilde{\tilde{v}}(x,[t]),\delta_2(x))$, то

$$\left\|\lambda(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|\le\left\|\lambda(x)-\tilde{\lambda}(x)\right\|+\left\|\tilde{\lambda}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|\le\delta_1(x)+\left\|\tilde{\lambda}(x)-\lambda^{(0)}(x)\right\|<\rho_{\lambda}(x)$$

$$\|\ \tilde{v}-v^{(0)}\ \|_2\le\|\ \tilde{v}-\tilde{\tilde{v}}\ \|_2+\|\ \tilde{\tilde{v}}-v^{(0)}\ \|_2\le\delta_2(x)+\|\ \tilde{\tilde{v}}-v^{(0)}\ \|_2<\rho_{\tilde{v}}(x),$$

т.е. $\lambda(x)\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_{\lambda}(x))$, $\tilde{v}(x,[t])\in S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$.

Возьмем функцию $\varepsilon(x)>0\,(\varepsilon(x)\in C[0,\omega])$ такую, что

$$\varepsilon(x)\gamma_{1,h}(x)<1,\qquad\left(1+\frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-\varepsilon(x)\gamma_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\right)<1. \tag{32}$$

В силу условия **B** и структуры матрицы Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})}{\partial\lambda}$ следует ее равномерная непрерывность в $S(\tilde{\lambda}(x),\delta_1(x))\times S_h(\tilde{\tilde{v}}(x,[t]),\delta_2(x))$. Поэтому найдется функция $\delta(x)\in(0,\min\{\delta_1(x),\delta_2(x)\}]$, $\delta(x)\in C[0,\omega]$, при которой $\left\|\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})}{\partial\lambda}-\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right\|<\varepsilon(x)$ для всех $(\lambda(x),\tilde{v}(x,[t]))\in S(\tilde{\lambda}(x),\delta(x))\times S_h(\tilde{\tilde{v}}(x,[t]),\delta(x))$.

Так как $(\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}}(x,[t])$ — решение задачи (6)–(9), то $Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})=0$.

Пусть пара $(\hat{\lambda}(x),\hat{v}(x,[t])$ — другое решение задачи (6)–(9) в $S(\tilde{\lambda}(x),\delta(x))\times S_h(\tilde{\tilde{v}}(x,[t]),\delta(x))$.

Компоненты систем функций $\tilde{\tilde{v}}(x,[t])=(\tilde{\tilde{v}}_1(x,t),\tilde{\tilde{v}}_2(x,t),\ldots,\tilde{\tilde{v}}_N(x,t))$, $\tilde{\tilde{v}}(x,[t])=(\hat{v}_1(x,t),$ $\hat{v}_2(x,t),\ldots,\hat{v}_N(x,t))$ являются решениями задачи Коши (6), (7) соответственно при $\lambda_r(x)=\tilde{\lambda}_r(x)$ и $\lambda_r(x)=\hat{\lambda}_r(x)$, поэтому на Ω_r для всех $r=1:N$ имеют место соотношения

$$\|\ \tilde{\tilde{v}}_r(x,t)-\hat{v}_r(x,t)\ \|=\left\|\int\limits_{(r-1)h}^{t}f\left(x,\tau,\tilde{\lambda}_r(x)+\tilde{\tilde{v}}_r(x,\tau)\right)d\tau-\int\limits_{(r-1)h}^{t}f\left(x,\tau,\hat{\lambda}_r(x)+\hat{v}_r(x,\tau)\right)d\tau\right\|\le$$

$$\le hL_0\|\ \tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\ \|+hL_0\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{v}\ \|_2,$$

откуда

$$\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{v}\ \|_2\le hL_0\|\ \tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\ \|+hL_0\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{v}\ \|_2. \tag{33}$$

В силу того, что $Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{v})=0$ и $Q_{1,h}(x,\hat{\lambda}(x),\hat{v})=0$, из равенств

$$\tilde{\lambda}(x)=\tilde{\lambda}(x)-\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\cdot Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{v}),$$

$$\hat{\lambda}(x)=\hat{\lambda}(x)-\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\cdot Q_{1,h}(x,Q_{1,h}(x,\hat{\lambda}(x),\hat{v})$$

следует, что

$$\tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)=-\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\int\limits_0^1\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\hat{\lambda}(x)+\theta(\tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}-\frac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right)d\theta\times$$

$$\times(\tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x))-\left(\frac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})}{\partial\lambda}\right)^{-1}\left(Q_{1,h}(x,\hat{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})-Q_{1,h}(x\hat{\lambda}(x),\hat{\tilde{v}})\right).$$

Оценив по норме обе части этого равенства, после несложных преобразований получим:

$$\|\ \tilde{\lambda}(x)-\hat{\lambda}(x)\ \|\le\frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-\varepsilon(x)\gamma_{1,h}(x)}\|\ Q_{1,h}(x,\hat{\lambda}(x),\tilde{\tilde{v}})-Q_{1,h}(x\hat{\lambda}(x),\hat{\tilde{v}})\ \|\le$$

$$\le\frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-\varepsilon(x)\gamma_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{\tilde{v}}\ \|_2. \qquad (34)$$

В силу (34) из (33) следует, что

$$\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{\tilde{v}}\ \|_2\le hL_0\left(\frac{\gamma_{1,h}(x)}{1-\varepsilon(x)\gamma_{1,h}(x)}\max\{1,hL_2\}hL_0+1\right)\|\ \tilde{\tilde{v}}-\hat{\tilde{v}}\ \|_2. \qquad (35)$$

На основании (32) из (33), (35) заключаем, что $\tilde{\tilde{v}}(x,[t])=\hat{\tilde{v}}(x,[t])$, $\tilde{\lambda}(x)=\hat{\lambda}(x)$, $x\in[0,\omega]$. Теорема 1 доказана.

На $\overline{\Omega}$ равенствами $v^{(k)}(x,t)=\lambda_r^{(k)}(x)+\tilde{v}_r^{(k)}(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=1:N$, $v^{(k)}(x,T)=\lambda_N^{(k)}(x)+$ $+\lim\limits_{t\to Nh-0}\tilde{v}_N^{(k)}(x,t)$ определим кусочно-непрерывную функцию $v^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,\ldots$.

Ввиду эквивалентности задач (1), (2) и (6)–(9) из теоремы 1 следует

Теорема 2. Пусть существуют $h>0:Nh=T$ $(N=1,2,\ldots)$, непрерывные на $[0,\omega]$ функции $\rho_\lambda(x)>0$, $\rho_{\tilde{v}}(x)>0$, $\rho_v(x)>0$, при которых выполняются условия **A**, **B**, матрица Якоби $\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\lambda(x),\tilde{v})}{\partial\lambda}:R^{nN}\to R^{nN}$ обратима для всех

$$(\lambda(x),\tilde{v}(x,[t]))\in S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda(x))\times S_h(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}}(x))$$

и имеют место неравенства 1)-5) теоремы 1. Тогда последовательность функций $v^{(k)}(x,t)$, $k=1,2,\ldots$, содержится в $S\left(v^{(0)}(x,t),\rho_v(x)\right)$, сходится к $v^*(x,t)$ — изолированному решению задачи (1), (2) в $S\left(v^{(0)}(x,t),\rho_v(x)\right)$ и справедлива оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\|\ v^*(x,t)-v^{(0)}(x,t)\ \|\le\frac{1}{1-q_{1,h}(x)}\left(q_{1,h}(x)+\gamma_{1,h}(x)\max\{1,hL_2\}hL_0\right)\|\ \tilde{v}^{(0)}\ \|_2.$$

References

1. *Dzhumabaev D.S., Temesheva S.M.* A Parametrization Method for Solving Nonlinear Two-Point Boundary Value Problems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2007. — Vol. 47. — № 1. — P. 39–63.
2. *Dzhumabaev D.S., Asanova A.T.* Indications of correct solvability of linear nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations // Dopovidi (doklady) NAN Ukraine. — 2010. — № 4. — P. 7–11.