УДК 517.9

Н.А.Абиев, Ж.С.Шонтаева

Таразский государственный университет им. М.Х.Дулати (E-mail: abievn@mail.ru)

Асимптотическое разложение периодического решения системы сингулярно-возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений

Исследованы вопросы асимптотического разложения периодического решения системы сингулярно-возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Подобная задача рассматривается в неспектральном случае коэффициента перед интегральным членом. Целью работы является нахождение асимптотического разложения периодического решения высокого порядка относительно малого параметра. В статье доказана асимптотическая сходимость упомянутого разложения и получена оценка его остаточного члена.

Ключевые слова: периодическое решение, сингулярное возмущение, интегро-дифференциальное уравнение, асимптотическое разложение периодического решения.

Периодическими будем называть функции, периодические по аргументам $t,\ x$ с одним и тем же периодом $T>0$, где $(t,x)\in\Omega=[0,T]\times(-\infty,+\infty)$.

Рассмотрим вопросы асимптотического разложения решения следующей системы сингулярно-возмущенных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\varepsilon(u_t(t,x)+u_x(t,x))=Du(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)u(s,x)ds+f(t,x)+\varepsilon g(t,x,u(t,x)),\qquad(1)$$

где $€\neq 0$, $\lambda\neq 0$ — вещественные числа; ε — малый положительный параметр; периодическая матричная функция $K(t,s)=\left\{k_{ij}(t,s)\right\}_{i,j=1,\dots,n}$ непрерывна по обоим аргументам на квадрате $[0,T]^2$; периодические вектор-функции $f(t,x)=\left\{f_i(t,x)\right\}_{i=1,\dots,n}$ и $g(t,x,u)=\left\{g_i(t,x,u)\right\}_{i=1,\dots,n}$ непрерывны по переменной t и непрерывно дифференцируемы по переменной x, более того, $g(t,x,u)$ непрерывно дифференцируема также по u; D — постоянная матрица, имеющая попарно различные характеристические числа $p_1,p_2,\dots,p_n$ с отличными от нуля вещественными частями $\mathrm{Re}(p_1),\mathrm{Re}(p_2),\dots,\mathrm{Re}(p_n)$. Кроме того, все известные функции предполагаются ограниченными по переменной x. Для векторных и матричных функций норма определяется формулами

$$\|f\|=\max_{1\le i\le n}\max_{0\le t\le T}\sup_{-\infty<x<+\infty}\left|f_i(t,x)\right|;\quad \|K\|=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}\max_{0\le t,s\le T}\left|k_{ij}(t,s)\right|.$$

Функция $g(t,x,u)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\left\|g\left(t,x,u_2\right)-g\left(t,x,u_1\right)\right\|\le L\left\|u_2-u_1\right\|,\quad L=const>0.$$

Исследование системы вида (1) восходит к работам [1–5]. В работе [6] доказаны существование и единственность периодического и непрерывного решения системы (1). В данной работе мы изучаем вопрос о близости этого решения при $\varepsilon\to 0$ к решению соответствующей системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$Dv(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v(s,x)ds+f(t,x)=0.\qquad(2)$$

Пусть $\sum_{k=1}^{n}V_k e^{p_k t}$ — фундаментальная матрица решений следующей системы:

$$\varepsilon z'(t)=Dz(t),$$

где V_k — постоянные матрицы размера $n\times n$; $V_k p_k=DV_k$; $\sum_{k=1}^{n}V_k=E_n$ — единичная матрица.

Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. Характеристические числа p_k, $k=1,...,n$, матрицы D попарно различны и имеют ненулевые вещественные части.

2. Имеет место неравенство $\left(|\lambda|T\|K\|+\varepsilon L\right)S\le\alpha<1$, где $S:=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{\|V_k\|}{\left|\mathrm{Re}\left(p_k\right)\right|}$.

Тогда для решения системы (1) имеет место следующая асимптотическая оценка:

$$\left\|u\left(t,x,\varepsilon\right)-v\left(t,x\right)\right\|\le\frac{M_1}{1-\alpha}\varepsilon,$$

где $M_1:=\left\|g\left(t,x,v\right)-\left(v_t+v_x\right)\right\|\,S$.

Доказательство. Если выполнено условие 3), то, как известно из [2], система (2) имеет единственное непрерывное и периодическое решение $v(t,x)$. Положим $u(t,x,\varepsilon)=v(t,x)+\varepsilon\xi(t,x,\varepsilon)$. Подставляя это в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, получаем систему уравнений:

$$\varepsilon(\xi_t+\xi_x)=D\xi+\lambda\int_0^T K(t,s)\xi(s,x)ds+g(t,x,v+\varepsilon\xi)-\left(v_t+v_x\right). \qquad (3)$$

Введя операторы $\Lambda: v\mapsto v_t+v_x$, $I: v\mapsto\ \lambda\int\limits_t^{t+T}W(t,s,\varepsilon)\int\limits_0^T K(s,\gamma)v(\gamma,x-t+s,\varepsilon)d\gamma ds$, систему интегро-дифференциальных уравнений (3) можно эквивалентно преобразовать к следующей системе интегральных уравнений, удовлетворяющей всем условиям теоремы 1 из [6]:

$$\xi=I\xi+Y, \qquad (4)$$

где

$$W(t,s,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{n}\frac{V_k}{\varepsilon\left\{e^{-p_kT/\varepsilon}-1\right\}}e^{p_k(t-s)/\varepsilon};$$

$$Y(t,x,\xi,\varepsilon)=\int_t^{t+T}W(t,s,\varepsilon)[g(s,x-t+s,v+\varepsilon\xi)-g(s,x-t+s,v)]ds+$$

$$+\int_t^{t+T}W(t,s,\varepsilon)\left[g\left(s,x-t+s,v\right)-\Lambda v\right]ds.$$

Следовательно, согласно теореме 1 из [6] система (4) имеет единственное периодическое, непрерывное и ограниченное решение $\xi^*(t,x,\varepsilon)$, ограниченное также при $\varepsilon\to0$. При этом

$$\left\|\xi^*\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|\le\left[|\lambda|T\|K\|+\varepsilon L\right]S\ \left\|\xi^*\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|+M_1\le\alpha\left\|\xi^*\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|+M_1.$$

Отсюда вытекает требуемая оценка: $\left\|\xi^*\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|\le M_1/(1-\alpha)$.

Теорема 1 доказана.

Займемся теперь вопросами асимптотического разложения более высокого порядка. Положим

$$u(t,x,\varepsilon):=s_p(t,x,\varepsilon)+\xi(t,x,\varepsilon)\varepsilon^{p+1},$$

где $s_p(t,x,\varepsilon):=\sum\limits_{k=0}^{p}v_k(t,x)\varepsilon^k$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме того, предположим, что далее известные функции непрерывно дифференцируемы требуемое число раз по соответствующим аргументам. Тогда для решения системы (1) справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\left\|u\left(t,x,\varepsilon\right)-s_p\left(t,x,\varepsilon\right)\right\|\le\frac{M_2}{1-\alpha}\varepsilon^{p+1},$$

где $M_2:=\left\|-\Lambda v_p+g_u\left(t,x,v_0\right)v_p+F_p\left(t,x,v_0,v_1,...,v_p,\varepsilon\right)\right\|\,S$.

Доказательство. Представим функцию $g\left(t,x,s_p+\xi\varepsilon^{p+1}\right)$ в виде

$$g\left(t,x,s_p+\xi\varepsilon^{p+1}\right)=\varepsilon^{p+1}\frac{g\left(t,x,s_p+\xi\varepsilon^{p+1}\right)-g(t,x,s_p)}{\varepsilon^{p+1}}+g(t,x,s_p)$$

и разложим функцию $g(t,x,s_p)$ в формальный ряд Тейлора по степеням малого параметра:

$$g(t,x,s_p)= g(t,x,v_0)+ g_u(t,x,v_0)v_1\varepsilon +$$
$$+[g_u(t,x,v_0)v_2 + H_1(t,x,v_0,v_1)]\varepsilon^2 +[g_u(t,x,v_0)v_3 + H_2(t,x,v_0,v_1,v_2)]\varepsilon^3 +...+$$
$$+[g_u(t,x,v_0)v_p + H_{p-1}(t,x,v_0,v_1,...,v_{p-1})]\varepsilon^p +$$
$$+[H_p(t,x,v_0,...,v_p)+H_{p+1}(t,x,v_0,...,v_p)\varepsilon+...]\varepsilon^{p+1},$$

где $H_i(t,x,v_0,v_1,...,v_i)$ — некоторые периодические, непрерывные и ограниченные функции. Подставим в систему (1) выражение $u(t,x,\varepsilon)=s_p(t,x,\varepsilon)+\xi(t,x,\varepsilon)\varepsilon^{p+1}$ и выражение для $g(t,x,s_p)$, полученное выше. Приравнивая далее коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра, из (1) получаем следующую систему уравнений:

$$Dv_0(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v_0(s,x)ds+f(t,x)=0; \tag{5$_0$}$$

$$Dv_1(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v_1(s,x)ds-\Lambda v_0(t,x)+g(t,x,v_0)=0; \tag{5$_1$}$$

$$Dv_2(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v_2(s,x)ds-\Lambda v_1(t,x)+g_u(t,x,v_0)v_1=0; \tag{5$_2$}$$

$$Dv_3(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v_3(s,x)ds-\Lambda v_2(t,x)+g_u(t,x,v_0)v_2+H_1(t,x,v_0,v_1)=0; \tag{5$_3$}$$

$$Dv_p(t,x)+\lambda\int_0^T K(t,s)v_p(s,x)ds-\Lambda v_{p-1}(t,x)+g_u(t,x,v_0)v_{p-1}+H_{p-2}(t,x,v_0,v_1,...,v_{p-2})=0; \tag{5$_p$}$$

$$\varepsilon\Lambda\xi = D\xi+\lambda\int_0^T K(t,s)\xi(s,x,\varepsilon)ds+\frac{g(t,x,s_p+\xi\varepsilon^{p+1})-g(t,x,s_p)}{\varepsilon^p}-$$
$$-\Lambda v_p(t,x)+g_u(t,x,v_0)v_p(t,x)+ F_p(t,x,v_0,v_1,...,v_p,\varepsilon), \tag{5$_{p+1}$}$$

где

$$F_p(t,x,v_0,...,v_p,\varepsilon):=H_{p-1}(t,x,v_0,...,v_{p-1})+H_p(t,x,v_0,...,v_p)\varepsilon+H_{p+1}\varepsilon^2+.... —$$

периодическая, непрерывная и ограниченная функция, ограниченная также при $\varepsilon\to 0$. Система интегральных уравнений (5$_0$) не содержит других неизвестных функций, кроме v_0. Существование единственного решения v_0 вытекает из общей теории фредгольмовских интегральных уравнений второго рода. Система интегральных уравнений (5$_1$) имеет такое же ядро, как уравнение (5$_0$) и содержит только функции v_0,v_1. Отсюда однозначно определяется функция v_1. Продолжая этот процесс, мы из систем интегральных уравнений (5$_0$)–(5$_p$) последовательно найдем все функции $v_0,v_1,...,v_p$.

Рассмотрим теперь последнюю интегро-дифференциальную систему (5$_{p+1}$). Если ввести обозначение

$$Y_p(t,x,\xi,\varepsilon)=\int_0^T W(t,s,\varepsilon)\frac{g\left(s,x-t+s,s_p+\xi\varepsilon^{p+1}\right)-g(s,x-t+s,s_p)}{\varepsilon^p}ds+$$
$$+\int_0^T W(t,s,\varepsilon)[-\Lambda v_p+g_u(s,x-t+s,v_0)v_p+F_p(s,x-t+s,v_0,v_1,...,v_p,\varepsilon)]ds,$$

то система (5$_{p+1}$) эквивалентно преобразуется к следующей системе интегральных уравнений, отличающейся от системы (4) только свободным членом:

$$\xi=I\xi+Y_p. \tag{6}$$

Эта система тоже удовлетворяет условиям теоремы 1 из [6]. Следовательно, (6) имеет единственное периодическое и непрерывное решение $\xi^*(t,x,\varepsilon)$, ограниченное также при $\varepsilon\to 0$. Так как

$$\left\|Y_p\left(t,x,\xi^*,\varepsilon\right)\right\|\le\left\|Y_p\left(t,x,\xi^*,\varepsilon\right)-Y_p\left(t,x,0,\varepsilon\right)\right\|+\left\|Y_p(t,x,0,\varepsilon)\right\|\le$$

$$\leq \frac{g\left(t,x,s_p+\xi^*\varepsilon^{p+1}\right)-g(t,x,s_p)}{\varepsilon^p}S+\left\|-\Lambda v_p+\ g_u\left(t,x,v_0\right)v_p+\ F_p\left(t,x,v_0,v_1,...,v_p,\varepsilon\right)\right\|\ S\leq$$

$$\leq \varepsilon LS\left\|\xi^*\right\|S+M_2,$$

то из (6) получаем, что $\left\|\xi^*\right\|\leq\left[\left|\lambda\right|T\left\|K\right\|+\varepsilon L\right]S\ \left\|\xi^*\right\|+M_2\leq\alpha\left\|\xi^*\right\|+M_2.$

Теорема 2 доказана.

Замечание. Поскольку все рассматриваемые ряды носят лишь асимптотический характер, то ряд Тейлора функции $g(t,x,s_p)$ по степеням ε не обязан сходиться. Поэтому для наших целей свойства аналитичности известных функций не требуется.

Список литературы

1 *Иманалиев М.И.* Колебания и устойчивость решений сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных систем. — Фрунзе: Илим, 1974. — 352 с.

2 *Абиев Н.А.* Существование и единственность периодического и ограниченного решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Вып. 27. — Бишкек: Илим, 1998. — С. 86–90.

3 *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. — М.: Мир, 1966. — 230 с.

4 *Абиев Н.А.* Существование периодического решения и его асимптотическая оценка для одной системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. — Вып. 28. — Бишкек: Илим, 1999. — С. 145–151.

5 *Абиев Н.А.* Асимптотическое разложение периодического решения нелинейного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром // Механика и моделирование процессов технологии. — Тараз. — 2009. — № 1. — С. 91–98.

6 *Абиев Н.А., Шонтаева Ж.С.* Существование и единственность периодического решения системы нелинейных сингулярно-возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2014. — № 2 (74). — С. 9–13.

Н.А.Әбиев, Ж.С.Шонтаева

Сингулярлы ауытқыған сызықсыз интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің периодты шешімінің асимптотикалық жіктелінуі

Бірінші ретті дербес туындылы сингулярлы ауытқыған сызықсыз интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесінің периодты шешімінің асимптотикалық жіктелінуі зерттелген. Осындай есеп интегралдық мүше алдындағы коэффициенттің спектралдық емес жағдайында қарастырылды. Периодты шешімнің аз параметр бойынша жоғарғы ретті асимптотикалық жіктелінуін табу жұмыстың мақсаты болып есептелді. Мақалада аталған жіктеудің асимптотикалық жинақтылығы дәлелденіп, оның қалдық мүшесінің бағасы алынған.

N.A.Abiev, Zh.S.Shontaeva

Asymptotic expansion of periodic solution of the system of singularly perturbed nonlinear integral-differential equations

Problems on asymptotic expansions of periodic solution for the system of singularly perturbed nonlinear first order partial integral-differential equations are investigated. Such a system is considered in non-spectral case of the coefficient at integral the term. Our interest is to get high order asymptotical expansion of periodic solutions with respect to small parameter. In the paper we prove asymptotical convergence of such expansion and give estimate for its residual terms.

References

1 Imanaliev M.I. *Oscillations and stability of solutions of singularly perturbed integral-differential systems*, Frunze: Ilim, 1974, 352 p. (in Rus.).

2 Abiev N.A. *Study on integro-differential equations*, Bishkek: Ilim, 1998, 27, p. 86–90 (in Rus.).

3 Hale J. *Oscillations in nonlinear systems*, Moscow: Mir, 1966, 230 p. (in Rus.).

4 Abiev N.A. *Study on integro-differential equations*, Bishkek: Ilim, 1999, 28, p. 145–151 (in Rus.).

5 Abiev N.A. Mechanics and modeling of technology, 2009, 1, p. 91–98 (in Rus.).

6 Abiev N.A., Shontaeva Zh.S. *Bull. of Karaganda State University, Ser. Mathematics, 2014, 2 (74)*, p. 3–7 (in Rus.).

ӘОЖ 378:658

Д.Б.Әлібиев, А.Т.Жұмашева, А.Ш.Қажыкенова, Ә.Б.Сейітімбетова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті (E-mail: dalibiev@mail.ru)

Бұлтты технологияларды білім жүйесінде пайдалану

Мақалада бұлтты технология жайында баяндалған. Бұлтты технологияның ерекшеліктері мен білім жүйесінде қолдану мүмкіндіктері айқындалған. Сонымен қатар ұсынылып отырған технологияның оқытушы мен білім алушыға қатысты артықшылықтары анықталған. Білім жүйесінде қолдануға болатын бұлтты технологияның қызмет көрсету аясы көрсетілген.

Кілт сөздер: ақпараттық-коммуникативтік технология, білім жүйесіндегі жаңа технология.

«Бұлтты есептеулер» термині (ағылш. *cloud computing*) Ғаламтор желісі арқылы көрсетілетін кез келген сервистер үшін қолданылады.

Қазақстан Республикасының Президенті Н.Ә.Назарбаевтың Жолдауында 2015 жылға қарай оқу ұйымдарының 50 % электронды оқулықтарды қолданатыны, ал 2020 жылы олардың саны 90 %-ға өсетіні айтылды, сәйкесінше ҚР-сының білім беру саласын «бұлтты технологиялар» өзгертетіні сөзсіз.

«Бұлтты технология» дербес оқу, интерактивті сабақтар мен ұжымдық оқыту үшін тамаша мүмкіндік жасай отырып, дәстүрлі оқудың орнына жаңашыл баламаны ұсынады. Сонымен қоса желілік бұлт оқушыларға өзара әсер етуге және орналасу жеріне байланыссыз ата-аналарымен, құрбыларымен бірлесіп жұмыс жүргізуге мүмкіндік береді.

Электронды оқытуға ауысу кейбір біліктілікті қажет ететіндіктен, колледждің барлық педагогикалық құрамы арнайы компьютер курстарында оқытылды, атап айтқанда: әкімшілік қызметкерлері үшін электронды оқу жоспарымен, педагогикалық жүктемемен, сабақтар кестесімен жұмыс істей білу; оқытушылар үшін электронды сынып журналымен жұмыс істеу, курстарды өңдеу, нәтижелерді тексеру; оқушылар мен ата-аналар Ғаламтор арқылы кестенің соңғы үлгісімен танысып, бағалар автоматты түрде қойылатын, үй тапсырмалары жазылатын электронды күнделікті көре алады, ал оқушылар дистанциялық оқытуға мүмкіндік алады.

Қазіргі кезде ҚР білім беруінде «бұлтты технологияларды» қолдану мүмкіндігін зерттей отыра, келесі қорытынды жасауға болады: болашақта білім беруде тек қана «бұлтты бағдарламалар» қолданылады және мемлекет бізге әлемдік стандарттар деңгейіндегі сапалық білімге қол жеткізуге бірегей мүмкіндік тудырады [1].

Дамыған шетелдің тәжірибесі көрсетіп отырғандай, жоғарыда сипатталған мәселелердің тамаша шешімі — оқыту үрдісіне «бұлтты есептеулерді» енгізу болып табылады. «Бұлтты есептеулер» — компьютерлік ресурстар мен қуаттылықтар тұтынушыға Ғаламтор-сервис ретінде көрініс беретін мәліметтерді жекелеп өңдеу технологиясы [2]. «Бұлтты технологиялар» қарқынды түрде дамып, кең таралуда. Кез келген технологиядай, «бұлтты технологиялардың» да өзіндік артықшылықтары мен кемшіліктері бар.

«Бұлтты технологиялар» сіздің барлық мәліметтеріңізді сақтауға, негізгі есептеуші жұмысты жасауға мүмкіндік береді, сіздің барлық мәліметтеріңіз, бағдарламалар мен икемдеулеріңіз әрқашан сізбен болады, бар керегі Ғаламторға қосылсаңыз болғаны. «Бұлтты технологиялардың» бірқатар артықшылықтары бар: аса қуатты компьютерлерді қажет етпеуі, сатып алынатын бағдарламалық қамтамасыз етуге шығынның азаюы (бұлттағы бағдарламалар есебінен), барлығы бұлтта