УДК 512.54

М.Ю.Навалихина, Ин.И.Павлюк, И.И.Павлюк

Павлодарский государственный университет им. С.Торайгырова (E-mail: inessa7772@mail.ru)

О мощности множества классов сопряженных элементов группы

Определено понятие не p-группы и установлено, что в такой группе, обладающей собственным нетривиальным коммутантом, смежные классы по этому коммутанту тогда и только тогда совпадают, когда элементы каждого смежного класса сопряжены между собой. Также получена оценочная характеристика мощности множества классов сопряженных элементов конечной не p-группы в зависимости от индекса коммутанта в самой группе.

Ключевые слова: группа, класс сопряженных элементов, мощность множества, множество классов сопряженных элементов группы.

В статье изучается группа G и рассмотрено $\pi(G)$ множество простых делителей порядков элементов группы G. Если элементы множества $\pi(G)$ делятся на простое число p и его степени, то такая группа является p-группой. Понятно, что если элементы $\pi(G)$ делятся на степени простых чисел p и q, где $p \neq q$, то G не будет p-группой. Например, $\pi(S_3) = \{2,3\}$ и симметрическая группа третьей степени S_3 имеет порядок шесть и не является p-группой. В работе исследуются группы, именно не являющиеся p-группами, для удобства назовем их не p-группами.

Коммутатор $[a,b]$ элементов a,b группы G (в указанном порядке) — это $[a,b] = a^{-1}b^{-1}ab = a^{-1}a^{b}$ [1]. Подгруппа $G' = гр(\{[a,b]\} / a,b \in G)$ группы G, порожденная всевозможными коммутаторами, есть коммутант группы G. В [2] установлено, что каждый смежный класс gG' (включая тривиальный) группы G по её коммутанту замкнут относительно сопряжения своих элементов, т.е. $(\forall a \in aG')(\forall g \in G)(a^{g} \in aG')$, а в работе [3] приведено доказательство отмеченного результата. Интерес к исследованию вопроса о сопряженности элементов нетривиального смежного класса группы G по её коммутанту $G' \neq e$ связан с тем, что замкнутость смежного класса относительно сопряженных элементов не обеспечивает их сопряженность, т.е. в таком классе могут находиться и несопряженные элементы. Нам интересна та ситуация, когда вместе с замкнутостью наличествует и сопряженность, по этой причине вводится понятие не p-группы отчасти, чтобы избежать контрпримера.

В работе без пояснений используется стандартная теоретико-групповая терминология из [4], а также понятия и обозначения из работы [1].

Отметим основные результаты. В предлагаемой работе доказана истинность следующего высказывания:

$$(\forall a,b \in G \setminus G')(G' < G))((a \underset{c}{\equiv} b) \Leftrightarrow (aG' = bG')) \tag{1}$$

на элементах не p-группы с указанными ограничениями, причем каждое из них существенно (см. замечание). Таким образом, получено описание классов сопряженных элементов группы и найдены границы мощности множества классов сопряженных элементов $_{c\equiv}|G|$ произвольной не p-группы G:

$$1 < {}_{c\equiv}|G| \leq |G : G'|. \tag{2}$$

Формула (2) дает оценочную характеристику мощности множества классов сопряженных элементов конечной не p-группы, и мы можем утверждать, что мощность множества классов сопряженных элементов конечной не p-группы не превосходит индекса коммутанта в самой группе.

Поскольку $|G| = |G : G'| \cdot |G'|$ [4] для конечной группы G, то формула (2) для конечной нетривиальной группы G приобретает вид

$$1 < {}_{c\equiv}|G| \leq \frac{|G|}{|G'|}. \tag{3}$$

Так как нетривиальный класс $aG^{'}$ замкнут относительно сопряжения своих элементов, а элементы класса $aG^{'}$ сопряжены (формула (1)), то класс $aG^{'}$ представляет собой полный класс $\overset{c\equiv}{a}$ сопряженных элементов. Поскольку мощность класса $|\overset{c\equiv}{a}|$ сопряженных элементов группы определяется формулой [4]:

$$|\overset{c\equiv}{a}| = |G : C(a)|, \tag{4}$$

а мощность смежного класса $aG^{'}$ равна $|aG^{'}|$, то с учетом формулы (4) будем иметь следующее равенство: $|\overset{c\equiv}{a}| = |aG^{'}| = |G^{'}|$ для элементов a, не принадлежащих коммутанту $G^{'}$.

Таким образом, формула (3) примет следующий вид:

$$1 < {}_{c\equiv}|\{G \setminus G^{'}\}| \le \frac{|G|}{|\overset{c\equiv}{a}|}. \tag{5}$$

Отсюда для конечных не p-групп, удовлетворяющих условию доказываемой в работе теоремы, с учетом теоремы Лагранжа, формула (5) примет вид:

$$1 < {}_{c\equiv}|\{G \setminus G^{'}\}| \le |C(a)|. \tag{6}$$

Формула (6) отражает полученную оценочную характеристику мощности множества классов сопряженных элементов, не принадлежащих коммутанту группы, а именно мощность множества таких классов не превосходит мощности централизатора некоторого элемента группы.

Приступим к доказательству основного результата работы.

Лемма 1. *Элементы нетривиального смежного класса $bG^{'}$ не p-группы G по коммутанту $G^{'}$ сопряжены между собой, т.е. в группе верна формула*

$$(\forall b \in G \setminus G^{'})(\forall h \in G^{'})(b \underset{c}{\equiv} bh).$$

Доказательство. Так как коммутант $G^{'}$ группы G порождается всевозможными коммутаторами, то каждый коммутатор $[b, g]$ для произвольных элементов $b, g \in G$ содержится в коммутанте $G^{'}$, т.е. $[b, g] = b^{-1}b^{g} \in G^{'}$. Отсюда следует, что $b^{-1}b^{g} = h \in G^{'}$ и $b^{g} = bh \in bG^{'}$. Таким образом, элемент $b \in G$ сопряжен с элементом bh, т.е. $b \underset{c}{\equiv} bh$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если в не p-группе G коммутант — $G^{'}$ собственная подгруппа группы G, а элементы $a, b \in G \setminus G^{'}$ сопряжены, то они лежат в одном смежном классе группы G по коммутанту, т.е. в группе верна формула*

$$(\forall a, b \in G \setminus G^{'})\big((a \underset{c}{\equiv} b) \Rightarrow (aG^{'} = bG^{'})\big).$$

Доказательство. Пусть $a \underset{c}{\equiv} b$. Отсюда следует, что $(\exists y \in G)\ (a^{y} = b)$. Очевидно, что $a^{-1}a^{y} = a^{-1}b$ и $a^{-1}b \in G^{'}$. Таким образом, $aG^{'} = bG^{'}$.

Теорема 1. *Если не p-группа G обладает собственным нетривиальным коммутантом $(G^{'} < G)$, то элементы $a, b \in G \setminus G^{'}$ тогда и только тогда сопряжены $(a \underset{c}{\equiv} b)$ в группе G, когда смежные классы $aG^{'}$ и $bG^{'}$ равны между собой, т.е.*

$$((\forall a, b \in G \setminus G^{'})(G^{'} < G))((a \underset{c}{\equiv} b) \Leftrightarrow (aG^{'} = bG^{'})).$$

Доказательство. *Необходимость* доказываемой теоремы, очевидно, следует из леммы 2.

Достаточность. Так как $a, b \in G \setminus e$, $G^{'} < G$ и $aG^{'} = bG^{'}$, то $a, b \in aG^{'}$. Отсюда по лемме 1 $a \underset{c}{\equiv} b$.

Теорема доказана.

Замечание. Ограничения $G^{'} < G$, $a \ne b$, $b \ne e$ в теореме существенны, поскольку существуют конечные p-группы со смежными классами по коммутанту с несопряженными элементами. Примером такой p-группы может служить 2-ая группа с генетическим кодом: $a^{8} = b^{2} = (ab)^{2} = e$; $ba = a^{7}b$ и коммутантом $G^{'} = \{e, a^{2}, a^{4}, a^{6}\}$, в которой смежный класс $aG^{'} = a^{3}G^{'}$, но a не сопряжен с a^{3}. В простой группе G коммутант совпадает с самой группой, т.е. $G^{'} = G$ и $(\forall a, b \in G)(aG^{'} = bG^{'} = G)$, но любая простая группа содержит по меньшей мере два класса сопряженных элементов, а в нашем случае — один класс, чего быть не может. Если же $G^{'}=e,$ то группа будет абелевой и в ней $(\forall a,b\in G)(a\neq b)\Rightarrow(ae\neq be).$ Далее, поскольку в каждом собственном нетривиальном коммутанте группы, по меньшей мере, два класса сопряженных элементов и $G^{'}$ может содержать несопряженные элементы, то ограничение $a,b\in G\setminus G^{'}$ также существенно.

Лемма 3. Элементы смежного класса $aZ(G),$ где $a\notin Z(G),$ группы G по ее центру $Z(G)$ сопряжены в группе G тогда и только тогда, когда коммутант $G^{'}$ группы G содержится в ее центре.

Доказательство. *Необходимость*. Пусть элементы az_1, az_2 смежного класса $aZ(G)$ сопряжены между собой, т.е. $az_1\,{}_c{\equiv}\,az_2$, где $z_1,z_2\in Z(G).$ Если $Z(G)=\{e\},$ то $a\,{}_c{\equiv}\,a.$ В этом случае лемма справедлива. Пусть $Z(G)\neq\{e\}.$ Очевидно, из сравнения $az_1\,{}_c{\equiv}\,az_2$ следует, что $(\exists x\in G)((az_1)^x=az_2)$ и $a^x=az_3$, где $z_3=z_2\cdot z_1^{-1}.$ Таким образом, $a\,{}_c{\equiv}\,az_3$, где $z_3\in Z(G).$

Далее, очевидно, что $(\forall g\in G)\ \ (a^g=a^{z_g}),$ где z_g — подходящий для g элемент центра $Z(G).$ Из равенства $a^g=az_g$ следует, что $(\forall g\in G)\ (a^{-1}a^g\in Z(G)).$ Поскольку элемент $a\in G$ выбран произвольно, то коммутант $G^{'}$ группы G содержится в центре группы $G.$

Достаточность. Предположим обратное. Пусть коммутант $G^{'}$ содержится в центре $Z(G).$ Если $G^{'}=\{e\},$ то группа G абелева, а фактор-группа по её центру тривиальна и в смежном классе его элементы сопряжены. Противоречие. Пусть теперь коммутант $G^{'}\neq\{e\}.$ Так как $G^{'}\leq Z(G),$ то $Z(G)\neq\{e\}.$ Поскольку $G^{'}\leq Z(G),$ то $(\forall g\in G)(\forall a\in G)([a,g]\in Z(G))$ и $a^{-1}a^g=z_g\in Z(G).$ Отсюда следует, что $a^g=az_g\in aZ(G),$ т.е. $az_1\,{}_c{\equiv}\,az_2$, где $z_1,z_2\in Z(G).$ Противоречие.

Лемма доказана.

Теорема 2. Если коммутант $G^{'}$ нетривиальной конечной группы G содержится в центре $Z(G)$ группы G, то мощность $|{}_{c\equiv}(G)|$ множества ${}_{c\equiv}(G)$ классов сопряженных элементов группы G равна индексу $|G:Z(G)|$ центра группы G в группе G плюс порядок центра $|Z(G)|,$ уменьшенный на единицу, т.е.

$$|{}_{c\equiv}(G)|=|G:Z(G)|+|Z(G)|-1. \tag{7}$$

Доказательство. По лемме 2 каждый нетривиальный смежный класс $bZ(G)$ состоит из сопряженных элементов. Докажем, что смежный класс $bZ(G)$ замкнут относительно сопряжения своих элементов, т.е. $(\forall g\in G)(\forall bz_1\in bZ(G))((bz_1)^g\in bZ(G)),$ и смежный класс $bZ(G)$ будет представлять полный класс сопряженных элементов. Действительно, так как $(\forall g\in G)([a,g]\in G^{'}\leq Z(G)),$ то

$$[a,g]=g^{-1}a^g=z_g\in Z(G).$$

Отсюда $(\forall g\in G)(a^g=az_g\in aZ(G))$ и $a\,{}_c{\equiv}\,az_1$, где $z\in Z(G).$ Таким образом, каждый смежный класс $aZ(G)$ представляет собой класс сопряженных элементов. Из этого следует, что множество классов сопряженных элементов ${}_{c\equiv}(G)$ группы G на единицу меньше индекса подгруппы $Z(G)$ в группе G (поскольку класс $Z(G)$ не учитывается) плюс число классов сопряженных элементов центра группы $Z(G),$ а он равен числу элементов в $Z(G).$

Теорема доказана.

Следствие. Смежный класс $bZ(G)$ группы G по её центру $Z(G)$ содержит только один класс сопряженных элементов, когда $b\neq e$ и коммутант $G^{'}$ группы содержится в $Z(G).$

Примером группы, подтверждающим формулу (7), может служить 2-ая группа

$$G_8=\{e,a,a^2,a^3,b,ab,a^2b,a^3b\}$$

с генетическим кодом $a^4=e,\ b^2=e,\ ba=a^3b,$ классы сопряженных элементов которой следующие:

$${}_{c\equiv}(G_g)=\{\overset{c\equiv}{e},\ \overset{c\equiv}{a},\overset{c\equiv}{a^2},\overset{c\equiv}{b},\overset{c\equiv}{ab}\},$$

центр группы G_8 есть $Z(G_8)=\{e,a^2\}$, а коммутант — $G_8^{'}=Z(G)$. По формуле (7)

$$_{c\,\equiv}(G_8) = |\,G_8 : Z(G_8)\,| + |\,Z(G)\,| - 1 = 5.$$

Работа написана в нераздельном соавторстве.

References

1 *Pavlyuk I.I.* Sravneniya i problema Chernikova v teorii grupp [Comparisons and Chernikov's problem in the theory of group]: Monography. — Pavlodar: Publ. PSU, 2002.

2 *Lyashenko I.I., Pavlyuk I.I.* O normalnykh mnojestvakh gruppy [On the normal sets of group]: Materials of the international science conference «The first Erzhanov's reading». — Pavlodar, Publ. PSU, 2004. — P. 262–264.

3 *Lyashenko I.I., Pavlyuk I.I.* O sopryajennosti gruppy I eye kommutante [On contingency of group and its commutant]. Theses of reports of the international science conference «Lomonosov — 2011». — Vol. 4.1. — Astana, 2011. — P. 65–67.

4 *Kargopolov M.I., Merzlyakov Yu.I.* Osnovu teorii grupp [Introduction to the theory of groups]. — Moscow: Nauka, 1982. — P. 288.

М.Ю.Навалихина, Ин.И.Павлюк, И.И.Павлюк

Топтың түйіндес элементтер кластарының жиын қуаты туралы

Мақалада *p*-емес топ түсінігі және меншікті тривиалды емес коммутантқа ие болатын осындай топта, осы коммутант бойынша сыбайлас кластар, элементтері өзара түйіндес болуынан шығатын сәйкестік анықталды. Сонымен қатар ақырлы *p*-емес топтың сол топтағы коммутант индексінен тәуелді болатын түйіндес элементтердің кластар жиыны қуатының бағалау сипаттамасы алынды.

M.Yu.Navalikhina, In.I.Pavlyuk, I.I.Pavlyuk

On cardinality of the set of classes of conjugate elements of a group

The concept of non *p*-group is defined and that in such group with own nontrivial commutant the cosets with this commutant coincide iff when elements of each coset are conjugate among themselves is established. The estimated characteristic of set cardinality of classes of the conjugate elements finite non *p*-group depending on an index of a commutant in the group is also received.