МАТЕМАТИКА

УДК 517.956.2

С.А.Абдыманапов

АО «Финансовая академия», Астана

ЗАДАЧА ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Мақалада еркін өзектің шектелмеген бұрыштық облысында сингулярлы нүктесі және арнайы берілген оң жағы бар екінші ретті эллиптикалық жүйелер үшін Бицадзе-Самарский түріндегі бір есеп шешілген.

In the work one more problem of the Bitsdadze-Samarsky type for the elliptic systems of the second order with a singular point and with a special right part in the unlimited angular area of the free opening is solved.

В работе решена одна задача типа Бицадзе-Самарского для эллиптических систем второго порядка с сингулярной точкой со специальной правой частью в неограниченной угловой области свободного раствора.

Пусть $0 \le \phi_1 < 2\pi$ и $G = \{z = re^{i\phi} : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \phi \le \phi_1\}$. Рассмотрим в G уравнение

$$\lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \overline{z}^2} + \frac{\gamma}{2\overline{z}} \frac{\partial V}{\partial \overline{z}} + \frac{b(\phi)}{4\overline{z}^2} \overline{V} = \frac{r^{\mu} \cdot f(\phi)}{4\overline{z}^2}, \tag{1}$$

где $\lambda > 0$, γ — действительные параметры;

$$\mu = 1 - \frac{\gamma}{2\lambda},\ \gamma < 2\lambda;\ b(\phi),\ f(\phi) \in C[0, \phi_1];$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{e^{i\phi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \phi}\right);$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \overline{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right) = \frac{e^{2i\phi}}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{2i}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \phi} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right),\ z = x + iy = re^{i\phi}.$$

Уравнение (1) при $\lambda = 0$, $f(\phi) \equiv 0$ использовано в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с общей структурой в точке уплощения [1] и исследовано в работах [2–4]. В [5] получено общее решение уравнения (1) при $\gamma = b(\phi) \equiv f(\phi) \equiv 0$ в единичном круге и доказано, что однородная задача Дирихле для уравнения (1) при $\gamma = b(\phi) \equiv f(\phi) \equiv 0$ имеет бесконечное множество решений. В [6–10] исследованы различные начально-краевые задачи для уравнения (1).

Решения уравнения (1) ищем в классе

$$C(\overline{G}) \bigcap W_p^2(G),\ 1 < p < \frac{2}{2-\mu}. \tag{2}$$

Методом разделения переменных можно показать, что в классе (2) уравнение (1) имеет решение вида

$$V(r, \phi) = r^{\mu} \cdot \psi(\phi), \tag{3}$$

где $\psi(\phi)$ — решение из класса $C^2[0, \phi_1]$ уравнения

$$\psi'' + \mu^2\psi = \frac{b(\phi)}{\lambda}\overline{\psi} - \frac{f(\phi)}{\lambda}. \quad (4)$$

Интегрируя уравнение (4) методом вариации произвольных постоянных, получим:

$$\psi(\phi) = \int_0^\phi b(\phi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\,d\gamma + f_1(\phi) + c_1\cos\mu\phi + c_2\sin\mu\phi, \quad (5)$$

где

$$b(\phi,\gamma) = \frac{1}{\lambda\mu}\cdot b(\gamma)\sin\mu(\phi-\gamma),\ f(\phi,\gamma) = \frac{-1}{\lambda\mu}\sin\mu(\phi-\gamma)\cdot f(\gamma),\ f_1(\phi) = \int_0^\phi f(\phi,\gamma)\,d\gamma,$$

c_1, c_2 — произвольные комплексные постоянные.

Для построения решений уравнения (5) используем следующие функции:

$$I_{\mu,0}(\phi) = \sin\mu\phi,\ J_{\mu,0}(\phi) = \cos\mu\phi;$$

$$I_{\mu,k}(\phi) = \int_0^\phi b(\phi,\gamma)\overline{I_{\mu,k-1}(\gamma)}\,d\gamma,\ J_{\mu,k}(\phi) = \int_0^\phi b(\phi,\gamma)\overline{J_{\mu,k-1}(\gamma)}\,d\gamma;$$

$$(B_{\mu,0}\psi)(\phi) = \int_0^\phi b(\phi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}\,d\gamma;$$

$$(B_{\mu,0}\psi)(\phi) = \int_0^\phi b(\phi,\gamma)\overline{B_{\mu,k-1}(\gamma)}\,d\gamma\ (k=\overline{1,\infty}).$$

Для этих функций имеют место следующие легко проверяемые соотношения:

$$(B_{\mu,0}(cJ_{\mu,n}(\phi)))(\phi) = \overline{c}J_{\mu,n+1}(\phi),\ (B_{\mu,0}(cI_{\mu,n}(\phi)))(\phi) = \overline{c}I_{\mu,n+1}(\phi),\ (B_{\mu,0}(B_{\mu,n}\psi)(\phi))(\phi) = (B_{\mu,n+1}\psi)(\phi); \quad (6)$$

$$|(B_{\mu,k}\psi)(\phi)| \le \frac{|b|_0^{k+1}|\psi|_0}{(\lambda\mu)^{k+1}(k+1)!}\cdot\phi^{k+1},\quad |I_{\mu,k}(\phi)| \le \frac{|b(\phi)|_0^k}{(\lambda\mu)^k}\cdot\frac{\phi^k}{k!},\ |J_{\mu,k}(\phi)| \le \frac{|b(\phi)|_0^k}{(\lambda\mu)^k}\cdot\frac{\phi^k}{k!},\ (k=\overline{0,\infty}), \quad (7)$$

где n — натуральное число; c — комплексное число; $|b(\phi)|_0 = \max\limits_{0\le\phi\le\phi_1}|b(\phi)|$.

Используя указанные обозначения, уравнение (5) записываем в виде

$$\psi(\phi) = (B_{\mu,0}\phi)(\phi) + c_1J_{\mu,0}(\phi) + c_2I_{\mu,0}(\phi) + f_1(\phi). \quad (8)$$

Если действуем оператором $B_{\mu,0}\psi$ на обе части равенства (8), то, с учетом (6), имеем

$$(B_{\mu,0}\psi)(\phi) = (B_{\mu,1}\psi)(\phi) + \overline{c}_1J_{\mu,1}(\phi) + \overline{c}_2I_{\mu,1}(\phi) + (B_{\mu,0}f_1)(\phi). \quad (9)$$

Из (8) и (9) вытекает

$$\psi(\phi) = (B_{\mu,1}\psi)(\phi) + c_1J_{\mu,0}(\phi) + c_2I_{\mu,0}(\phi) + \overline{c}_1J_{\mu,1}(\phi) + \overline{c}_2I_{\mu,1}(\phi) + (B_{\mu,0}f_1)(\phi) + f_1(\phi). \quad (10)$$

Если опять действуем оператором $B_{\mu,0}\psi$ к обеим частям равенства (10), то, с учетом (6), имеем

$$(B_{\mu,0}\psi)(\phi) = (B_{\mu,2}\psi)(\phi) + \overline{c}_1J_{\mu,1}(\phi) + \overline{c}_2I_{\mu,1}(\phi) + c_1J_{\mu,0}(\phi) + c_2I_{\mu,2}(\phi) + (B_{\mu,1}f_1)(\phi) + (B_{\mu,0}f_1)(\phi). \quad (11)$$

Подставляя формулу (11) в уравнение (8), получим:

$$\psi(\phi) = (B_{\mu,2}\psi)(\phi) + c_1(J_{\mu,0}(\phi) + J_{\mu,2}(\phi)) + c_2(I_{\mu,0}(\phi) + I_{\mu,2}(\phi)) +$$
$$+\overline{c}_1J_{\mu,0}(\phi) + \overline{c}_2I_{\mu,1}(\phi)) + f_1(\phi) + (B_{\mu,0}f_1)(\phi) + (B_{\mu,1}f_1)(\phi).$$

Продолжая этот процесс $2n$ раз, получим следующее представление для решения уравнения (4):

$$\psi(\phi) = (B_{\mu,2n}\psi)(\phi) + c_1\sum_{k=0}^n J_{\mu,2k}(\phi) + c_2\sum_{k=1}^n I_{\mu,2k}(\phi) +$$
$$+\overline{c}_1\sum_{k=1}^n J_{\mu,2k-1}(\phi) + \overline{c}_2\sum_{k=1}^n I_{\mu,2k-1}(\phi) + \sum_{k=0}^{2n-1}(B_{\mu,k}f_1)(\phi) + f_1(\phi).$$

Если переходим к пределу при $n\to\infty$ в последнем представлении, то в силу оценок (7) получим

$$\psi(\phi) = \overline{c}_1P_{\mu,1}(\phi) + \overline{c}_2Q_{\mu,1}(\phi) + c_1P_{\mu,2}(\phi) + c_2Q_{\mu,2}(\phi) + (Rf)(\phi), \quad (12)$$

где

$$P_{\mu,1}(\phi) = \sum_{k=1}^\infty J_{\mu,2k-1}(\phi),\ P_{\mu,2}(\phi) = \sum_{k=0}^\infty J_{\mu,2k}(\phi);$$

$$Q_{\mu,1}(\phi)=\sum_{k=1}^{\infty}I_{\mu,2k-1}(\phi)\,,\; Q_{\mu,2}(\phi)=\sum_{k=0}^{\infty}I_{\mu,2k}(\phi)\,;$$

$$(Rf)(\phi)=f_1(\phi)+\sum_{k=0}^{\infty}(B_{\mu,k}f_1)(\phi)\,.$$

Из определения функции $P_{\mu,1}(\phi), P_{\mu,2}(\phi), Q_{\mu,1}(\phi), Q_{\mu,2}(\phi)$ и $(Rf)(\phi)$ вытекают следующие полезные соотношения:

$$P_{\mu,1}(\phi)=\int_0^{\phi}b(\phi,\gamma)\overline{p_{\mu,2}(\gamma)}\,d\gamma\,,\; Q_{\mu,1}(\phi)=\int_0^{\phi}b(\phi,\gamma)\overline{Q_{\mu,2}(\gamma)}\,d\gamma\,;$$

$$P_{\mu,2}(\phi)=J_{\mu,0}(\phi)+\int_0^{\phi}b(\phi,\gamma)\overline{p_{\mu,1}(\gamma)}\,d\gamma\,,\; Q_{\mu,2}(\phi)=I_{\mu,0}(\phi)+\int_0^{\phi}b(\phi,\gamma)\overline{Q_{\mu,1}(\gamma)}\,d\gamma\,;$$

$$P'_{\mu,1}(\phi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\phi}b(\gamma)\cos\mu(\phi-\gamma)\overline{p_{\mu,2}(\gamma)}\,d\gamma\,,\; Q'_{\mu,1}(\phi)=\frac{1}{\lambda}\int_0^{\phi}b(\gamma)\cos\mu(\phi-\gamma)\overline{Q_{\mu,2}(\gamma)}\,d\gamma\,;$$

$$P'_{\mu,2}(\phi)=-\mu\sin\mu\phi+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\phi}b(\gamma)\cos\mu(\phi-\gamma)\overline{p_{\mu,1}(\gamma)}\,d\gamma\,;$$

$$Q'_{\mu,2}(\phi)=\mu\cos\mu\phi+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\phi}b(\gamma)\cos\mu(\phi-\gamma)\overline{Q_{\mu,1}(\gamma)}\,d\gamma\,;$$

$$((Rf)(\phi))'=-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\phi}\cos\mu(\phi-\gamma)(f(\phi)-b(\phi))\overline{(Rf)(\gamma)}\,d\gamma\,.$$

Из этих соотношений и вида функции $P_{\mu,1}(\phi), P_{\mu,2}(\phi), Q_{\mu,1}(\phi), Q_{\mu,2}(\phi), (Rf)(\phi)$ следует

$$P_{\mu,1}(0)=Q_{\mu,1}(0)=Q_{\mu,2}(0)=(Rf)(0)=0\,,\; P_{\mu,2}(0)=1\,; \tag{13}$$

$$P'_{\mu,1}(0)=Q'_{\mu,1}(0)=P'_{\mu,2}(0)=0\,,\; Q'_{\mu,2}(0)=\mu\,. \tag{14}$$

Используя неравенства (7), мы можем получить следующие оценки:

$$|P_{\mu,1}(\phi)|\le sh\left(\frac{|b|_0\,\phi}{\lambda\mu}\right),\; |P_{\mu,2}(\phi)|\le ch\left(\frac{|b|_0\,\phi}{\lambda\mu}\right);$$

$$|Q_{\mu,1}(\phi)|\le sh\left(\frac{|b|_0\,\phi}{\lambda\mu}\right),\; |Q_{\mu,2}(\phi)|\le ch\left(\frac{|b|_0\,\phi}{\lambda\mu}\right);$$

$$|(Rf)(\phi)|\le\frac{|f|_0\,\phi}{\lambda\mu}\exp\left(\frac{|b|_0\,\phi}{\lambda\mu}\right).$$

С помощью этих оценок легко можно показать, что функция $\psi(\phi)$, заданная по формуле (12), является решением уравнения (4) из класса $C^2[0,\phi_1]$.

Подставив представление (12) в формулу (3), имеем:

$$V(r,\phi)=r^{\mu}(\overline{c}_1\,P_{\mu,1}(\phi)+c_1P_{\mu,2}(\phi)+\overline{c}_2Q_{\mu,1}(\phi)+c_2Q_{\mu,2}(\phi)+(Rf)(\phi))\,. \tag{15}$$

Из формулы (15) легко следует

$$V(r,\phi)\in C(G)\bigcap W_p^2(G)\,.$$

Рассмотрим теперь краевую задачу типа Бицадзе-Самарского для уравнения (1).

Пусть $\phi_1<\phi_2\le 2\pi$.

Задача B-S. *Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее условиям*

$$\alpha_1V(r,0)+\alpha_2V(r,\phi_2)=b_1r^{\mu}\,; \tag{16}$$

$$\frac{\partial V}{\partial\phi}(r,0)=b_2r^{\mu}\,, \tag{17}$$

где α_1,α_2,b_1 *— заданные комплексные числа, а* μ, b_1 *— действительные числа.*

Решение задачи B-S ищем в виде (15). Постоянные c_1 и c_2 подбираем так, чтобы функция $V(r,\phi)$, заданная по формуле (15), удовлетворяла краевым условиям (16), (17). Для этого, подставив функцию, заданную по формуле (15), в краевые условия (17) и (16), с учетом (14) и (13) получим:

$$c_2 = \frac{b_2}{\mu}\,; \tag{18}$$

$$\left(\alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)\right)c_1 + \alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2)\overline{c_1} = d(\phi_2)\,, \tag{19}$$

где

$$d(\phi_2) = b_1 - (Rf)(\phi_2) - \frac{\alpha_2 b_2}{\mu}\left(Q_{\mu,1}(\phi_2) + Q_{\mu,1}(\phi_2)\right).$$

Если $\Delta(\phi_2) = \left|\alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)\right|^2 - \left|\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2)\right|^2 \neq 0$, то из (19) следует

$$c_1 = \frac{\Delta_1(\phi_2)}{\Delta(\phi_2)}\,, \tag{20}$$

где

$$\Delta_1(\phi_2) = \left(\overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 \overline{P_{\mu,2}(\phi_2)}\right) \cdot d(\phi_2) - \alpha_2 P_{\mu,1}(\phi)\overline{d(\phi_2)}\,.$$

Таким образом, при $\Delta(\phi_2) \neq 0$ мы получим решение задачи B-S в виде

$$V(r,\phi) = r^{\mu}\left(\overline{\frac{\Delta_1(\phi_2)}{\Delta(\phi_2)}} P_{\mu,1}(\phi) + \frac{\Delta_1(\phi_2)}{\Delta(\phi_2)} P_{\mu,2}(\phi) + \frac{b_2}{\mu} Q_{\mu,1}(\phi) + \frac{b_2}{\mu} Q_{\mu,2}(\phi) + (Rf)(\phi)\right). \tag{21}$$

Если $\Delta(\phi_2) = 0$, то для разрешимости уравнения (19) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}[(\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) + \alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2))\overline{d(\phi_2)}] = 0\,; \\ &\mathrm{Re}[(\alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2) - \alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2))\overline{d(\phi_2)}] = 0\,. \end{aligned} \tag{22}$$

При выполнении условия (22) из равенства (19) получим

$$c_1 = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{Re}\, d(\phi_2) + i(\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 \overline{P_{\mu,1}(\phi_2)})\beta}{\mathrm{Re}[\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) + \alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)]}, \text{ если } \mathrm{Re}[P_{\mu,1}(\phi_2) + \alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)] \neq 0; \\[2ex] \dfrac{\mathrm{Re}\, d(\phi_2) - (\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) + \overline{\alpha}_1 + \overline{\alpha}_2 \overline{P_{\mu,2}(\phi_2)})\beta}{\mathrm{Im}[\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) - \alpha_1 - \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)]}, \text{ если } \mathrm{Im}[\alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2) - \alpha_1 - \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)] \neq 0; \\[2ex] c_3, \text{ если } \mathrm{Re}[P_{\mu,1}(\phi_2) + \alpha_1 + \alpha_2 P_{\mu,2}(\phi_2)] = 0,\ \ \mathrm{Im}[\alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2) - \alpha_1 - \alpha_2 P_{\mu,1}(\phi_2)] = 0, \end{cases} \tag{23}$$

где β — произвольное действительное, а c_3 — произвольное комплексное числа.

Следовательно, доказана

Теорема. Если $\Delta(\phi_2) \neq 0$, то задача B-S имеет единственное решение, которое находится по формуле (21). Если $\Delta(\phi_2) = 0$, то для разрешимости задачи B-S необходимо и достаточно выполнения условий (22). При выполнении этих условий задача B-S имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формулам (3), (12), (23).

Замечание. При $\phi_1 = \phi_2$ задача B-S становится задачей Робина.

Список литературы

1. *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. — Warsaw, 1984. — Vol. 12. — P. 241–272.
2. *Тунгатаров А.* О непрерывных решениях уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой // ДАН СССР. — 1991. — Т. 319. — № 3. — С. 570–573.
3. *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. — Алматы: Ғылым, 2005. — 169 с.
4. *Meziani A.* Representation of solutions of singular CR equation in the plane // Complex Var. Elliptic Eq. — 2008. — Vol. 53. — P. 1111–1130.
5. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

6. *Абдыманапов С.А.* Начально-краевая задача для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью // Вестн. НАН РК. — 2005. — № 5. — С. 3–7.
7. *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б.* Об одном классе эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью // Чебышевский сб. — 2005. — Т. 6. — № 2(14). — С. 14–19.
8. *Абдыманапов С.А.* Начально-краевые задачи для одного класса неоднородных эллиптических систем второго порядка на плоскости с сингулярной точкой // Нелинейный мир. — 2007. — Т. 5. — № 3. — С. 148–153.
9. *Абдыманапов С.А.* Начально-краевые задачи для одного класса однородных эллиптических систем второго порядка на плоскости с сингулярной точкой // Современная математика. Фундаментальные направления. — РУДН, 2008. — Т. 29. — С. 5–10.
10. *Abdymanapov S.A., Tungatarov A.B.* An initial problem for a class of second-order elliptic systems in the plane with a singular point // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — Vol. 52. — № 8. — P. 655–661.

УДК 517.956.3

А.Н.Адекенова, Л.В.Устинова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

АВТОМАТИЗАЦИЯ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ

Мақалада жоғары оқу орындарындағы сабақ кестесін компьютердің көмегімен құру проблемасы қарастырылған. Есепті анықтау барысында сабақ кестені құруға қойылатын талаптар, сабақ кестені құру стратегиясы мен оңтайлы критерийлер ескерілген. Кез келген бір факультет үшін сабақ кестесін құратын программаның сипаттамасы берілген.

In given clause the problem of automation of drawing up of the time-table in higher educational institutions is considered. In a course to statement of a task the showed requirements, strategy, criterion of an optimality are considered(examined). For realization of automation of the given task the program with which help was made the time-table for one chosen faculty is made.

Каждый учебный год в учебных заведениях начинается с решения задачи составления расписания, при которой необходимо учитывать следующие требования [1]:

1. Относящиеся к работе всего вуза:

– формируемое расписание создается на одну или две учебные недели, с учетом четности недель, и используется в течение семестра или блока в работе всего вуза;
– длительность учебной недели для групп составляет 5 или 6 учебных дней.
– работа вуза организована в одну или более (до трех) смен;
– определяется временная единица при составлении расписания.

2. Относящиеся к студентам:

– объем максимально допустимой нагрузки для студентов должен соответствовать гигиеническим требованиям. Часы факультативных, групповых и индивидуальных занятий должны входить в объем максимально допустимой нагрузки;
– перерывы между занятиями и длительность занятий устанавливаются в соответствии с гигиеническими требованиями.

3. Относящиеся к факультативным занятиям:

– расписание составляется отдельно для обязательных и факультативных занятий;
– факультативные занятия проводятся после обязательных;
– факультативные занятия следует планировать на дни с наименьшим количеством обязательных занятий.

4. Относящиеся к распределению педагогической нагрузки:

– основой распределения педагогической нагрузки является учебный план вуза;
– такое распределение не должно нарушать требований, предъявляемых к расписанию.

Важными условиями правильного формирования расписания являются следующие:

1) количество групп должно соответствовать количеству имеющихся оборудованных аудиторий;

2) штат вуза должен быть укомплектован, т.е. количество преподавателей должно соответствовать количеству групп обучаемых.