10. *Vasileyv F.P.* Numerical methods of extremal problems decision. — M.: Science, 1980. — 520 p.
11. *Samarskii A.A.* Theory of difference schemes. — M.: Science, 1989. — 616 p.
12. *Anderson D., Tannehill J.* Computational hydromechanics and heat exchange. — M.: World, 1990. — 384 p.


УДК 517. 956.32

# О существовании и дифференциальных свойствах решений одного класса сингулярных дифференциальных уравнений смешанного типа

# About existence and differential characteristics of the decisions of one class singular differential equations of the mixed type

Муратбеков М.Б., Мусилимов Б.М., Игисинов С.Ж.

*Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им. А. Ясауи (e-mail: iqisinovsabit@mail.ru)*

Коэффициенттері өспелі аралас типті сингулярлы теңдеулер класы қарастырылды. Шешімнің бар болуы және жалғыздығы зерттелді. Шешімді құру әдісі көрсетілді. Коэффициенттерге қойылған кейбір шектеулермен шешімнің Соболев кеңістігіндегі коэрцитивті бағалары алынды.

The class of singular equation of mixed type with increasing coefficient is considered.The existence and singleness of solving is investigated. The method of construction of solving is expounded. In some restriction to coefficient the coercitive marks of solving in the space of Sobolev are received.

*Введение и формулировка результатов*

Пусть $\Omega = \{(x, y): -\infty < x < \infty, -1 < y < 1\}$. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u, \quad u(x, y) \in C_0^\infty(\Omega) \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами, где $k(y)$ – непрерывная функция на [-1,1] и $yk(y) > 0, k(0) = 0$, $C_0^\infty(\Omega)$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющее условиям $u(x,0) = u(x,1) = 0$, финитных по переменной $x$.

В случае неограниченной области задача о разрешимости и гладкости решений уравнений смешанного типа, оценки их решений в различных пространствах изучены в работах [1–5].

Обозначим через $K(\tau, b)$ класс коэффициентов, удовлетворяющих следующим условиям:

*i)* $|a(x)| \geq \delta_0 > 0,\ c(x) \geq \delta > 0$ — непрерывные функции в $R$ ( $R = (-\infty, +\infty)$ );

*ii)* $c_0 c(x) \leq a^2(x) \leq c_1 c(x)$, $c_0 > 0$, $c_1 > 0$ — постоянные числа;

*iii)* $|a(x) - a(t)|^2 + |c(x) - c(t)| \leq \tau c(t)$

для всех $x, t \in R$ таких, что $|x - t| \leq bd(t)$, $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}$, $\tau > 0$, $b > 0$.

**Теорема 1.** Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа $\tau_0$ и $b_0$ такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, и замыкание $L$ оператора $L_0 u = u_{xx} - u_{yy} + a(x)u_x + c(x)u$, $D(L_0) = C_0^\infty(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ существует.

**Теорема 2.** Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа $\tau_0$ и $b_0$ такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, и оператор $L$ имеет непрерывный обратный оператор.

**Теорема 3.** Пусть $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$. Тогда найдутся числа $\tau_0$ и $b_0$ такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau \in (0, \tau_0)$ и $b > b_0$, и будет справедлива оценка

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \|u\|_2 \le c\|Lu\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

*1. Оператор с постоянными коэффициентами*

Рассмотрим оператор

$$L_j u + \lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x_j)u_x + (c(x_j) + \lambda)u \tag{1.1}$$

на $C_0^\infty(\Omega)$, $\lambda > 0$, где $x_j \in R$ (их специальный выбор будет сделан позже), $j = 1, 2, \ldots$ .

Нетрудно проверить, что оператор $L_j + \lambda E$ допускает замыкание в $L_2$, и замыкание также обозначим через $L_j + \lambda E$.

**Утверждение 1.1.** Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда:

*а)* для любого $u \in D(L_j)$ справедлива оценка $\|(L_j + \lambda E)u\|_2 \ge c \cdot \|u\|_{2,1}$ $\big(\|u\|_{2,1}$ — норма пространства $W_2^1(\Omega)\big)$;

*б)* оператор $L_j + \lambda E$ при $\lambda > 0$ непрерывно обратим.

**Утверждение 1.2.** Пусть выполнены условия *i)-ii)*. Тогда справедливы оценки:

*а)* $\|(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \le \dfrac{c_0}{c(x_j) + \lambda}$; *б)* $\|D_x(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \le \dfrac{c_1}{|a(x_j)|}$;

*в)* $$\|D_y(L_j + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \le \frac{c_2}{\sqrt{c(x_j) + \lambda}}, \tag{1.2}$$

где $c_0 > 0; c_1 > 0; c_2 > 0$ — постоянные числа.

Для доказательства этих утверждений докажем предварительно несколько лемм.

Рассмотрим оператор

$$l_{j,t}u + \lambda u = -u_{yy} + (-k(y)t^2 + ita(x_j) + c(x_j) + \lambda)u \quad (-\infty < t < \infty),$$

первоначально определенный в $C_0^\infty(0,1)$, где $C_0^\infty(0,1)$ — множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых функций и удовлетворяющее условиям $u(0) = u(1) = 0$.

**Лемма 1.1.** Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда:

*а)* $$\|(l_{j,t} + \lambda E)u\|_2 \ge |a(x_j)||t|\|u\|_2, \quad u \in D(l_{j,t}), -\infty < t < \infty; \tag{1.3}$$

*б)* $$\sqrt{2}\|(l_{j,t} + \lambda E)u\|_2 \ge \big(c(x_j) + \lambda\big)\|u\|_2, \quad u \in D(l_{j,t}), -\infty < t < \infty; \tag{1.4}$$

*в)* $$\frac{1}{\sqrt{c(x_j) + \lambda}}\|(l_{j,t} + \lambda E)u\|_2 \ge \|u'\|_2, \quad u \in D(l_{j,t}).$$

**Лемма 1.2.** Пусть выполнены условия *i)-ii)* и $\lambda > 0$. Тогда оператор $(l_{j,t} + \lambda E)$ непрерывно обратим в $L_2(0,1)$, причем

$$\|(l_{j,t} + \lambda E)^{-1}\|_{2\to 2} \le \frac{\sqrt{2}}{c(x_j) + \lambda}. \tag{1.5}$$

*Доказательство леммы 1.1.* Для всех $u \in C_0^\infty(0,1)$ имеем

$$|< l_{j,t}u + \lambda u, u >| = \left|\int_0^1 \Big[(-u_{yy} + (-k(y)t^2 + ita(x_j) + c(x_j) + \lambda)u\Big]\bar{u}dy\right| =$$

$$= \left|\int_0^1 \Big[|u_y|^2 + (-k(y)t^2 + ita(x_j) + c(x_j) + \lambda)|u|^2\Big]dy\right|. \tag{1.6}$$

Отсюда, а также используя свойства комплексных чисел, получаем, что

$$\left| < l_{j,t}u + \lambda u, u > \right| \ge \left| \int_0^1 i\, t\, a(x_j) |u|^2 \, dy \right| \ge |t| \left| a(x_j) \right| \|u\|_2^2 . \tag{1.7}$$

Из (1.7), пользуясь неравенством Коши, находим, что

$$\left\| l_{j,t}u + \lambda u \right\|_2 \ge |t| \left| a(x_j) \right| \|u\|_2 , \; (-\infty < t < \infty). \tag{1.8}$$

Пункт *а)* леммы 1.1 доказан.

Докажем пункт *б)* леммы 1.1. Из (1.9), используя неравенства Коши с $\varepsilon > 0$ и Коши-Буняковского, получим:

$$\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)} \left\| (l_{j,t} + \lambda E)u \right\|_2^2 + \frac{c(x_j)+\lambda}{2} \|u\|_2^2 \ge \int_0^1 \left[ |u'|^2 + (c(x_j)+\lambda) \right] |u|^2 \, dy - \int_0^1 |k(y)| t^2 |u|^2 \, dy, \tag{1.9}$$

где $\varepsilon = c(x_j) + \lambda$.

Умножим обе части неравенства (1.8) на множитель $\dfrac{1}{2(c(x_j)+\lambda)}$. Тогда

$$\frac{1}{2(c(x_j)+\lambda)} \left\| (l_{j,t} + \lambda E)u \right\|_2^2 \ge \frac{|t|^2 a^2(x_j)}{2(c(x_j)+\lambda)} \|u\|_2^2 . \tag{1.10}$$

Из (1.9) и (1.10) следует, что

$$\frac{2}{2(c(x_j)+\lambda)} \left\| (l_{j,t} + \lambda E)u \right\|_2^2 \ge \int_0^1 \left[ |u'|^2 + \left[ (c(x_j)+\lambda) - \frac{c(x_j)+\lambda}{2} \right] \right] |u|^2 \, dy +$$

$$+ \int_0^1 |t|^2 \left[ \frac{a^2(x_j)}{2(c(x_j)+\lambda)} - k(y) \right] |u|^2 \, dy . \tag{1.11}$$

Отсюда, учитывая условие *ii)*, получаем, что

$$\frac{1}{c(x_j)+\lambda} \left\| (l_{j,t} + \lambda E)u \right\|_2^2 \ge \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ |u'|^2 + (c(x_j)+\lambda) \right] |u|^2 \, dy . \tag{1.12}$$

Из (1.12) вытекает, что

$$\sqrt{2} \left\| (l_{j,t} + \lambda E)u \right\|_2 \ge \left( c(x_j) + \lambda \right) \|u\|_2 .$$

Таким образом, пункт *б)* леммы 1.1 доказан.

Из (1.12) также следует доказательство пункта *в)* леммы 1.1.

*Доказательство леммы 1.2.* Повторяя выкладки и рассуждения, использованные в работе [5], получаем доказательство леммы 1.2.

*Доказательство утверждения 1.1.* Для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим функционал

$$< (L_j + \lambda E)u, u > = \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} (k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(x_j)u_x + c(x_j)u))u\,dxdy =$$

$$= \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} k(y)u_{xx}u\,dxdy - \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} u_{yy}u\,dxdy + \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} a(x_j)u_x u\,dxdy + \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} c(x_j)u^2\,dxdy . \tag{1.13}$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $u \in C_0^\infty(\Omega)$, имеем:

$$\left| < (L_j + \lambda E)u, u > \right| = \left| \iint_\Omega \left[ u_y{}^2 - k(y)u_x{}^2 + (c(x_j)+\lambda)u^2 \right] dydx \right| \ge$$

$$\ge \int_\Omega \left[ u_y{}^2 + (c(x_j)+\lambda)u^2 \right] dydx - \int_\Omega |k(y)| u_x{}^2\,dxdy . \tag{1.14}$$

Отсюда, пользуясь неравенством Коши с $\varepsilon > 0$, находим, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 \ge \int_\Omega \left[u_y^2 + (c(x_j)+\lambda-\frac{\varepsilon}{2})u^2\right]dxdy - \int_\Omega |k(y)|u_x{}^2 dxdy.$$

Учитывая условие *i)*, получаем, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_\Omega \left[u_y{}^2 + c(x_j)u^2\right]dxdy - \int_\Omega |k(y)|u_x{}^2 dxdy. \quad (1.15)$$

Теперь для $u \in C_0^\infty(\Omega)$ рассмотрим следующий функционал:

$$<(L_j+\lambda E)u, u_x> = \int_\Omega k(y)u_{xx}u_x dxdy - \int_\Omega u_{yy}u_x dxdy +$$

$$+\int_\Omega a(x_j)u_x u_x dxdy + \int_\Omega \left(c(x_j)+\lambda\right)u_x u dxdy. \quad (1.16)$$

Непосредственно можно убедиться, что

$$\int_\Omega k(y)u_{xx}u_x dxdy = 0;\ \int_\Omega u_{yy}u_x dxdy = 0;\ 2\left(c\left(x_j\right)+\lambda\right)\int_\Omega u_x u dxdy = 0. \quad (1.17)$$

Из равенства (1.16), учитывая (1.17), имеем, что

$$\left|\left\langle Lu+\lambda u, u_x\right\rangle\right| \ge \left|a\left(x_j\right)\right|\int_\Omega u_x^2 dxdy.$$

Отсюда, используя условие *i)* и применяя неравенство Коши, находим, что

$$\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 \ge \delta_0^2\left\|u_x\right\|_2^2. \quad (1.18)$$

Умножая обе части неравенства (1.18) на $c_0$ и складывая полученное неравенство с (1.15), получаем, что

$$\frac{1}{2\varepsilon}\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 + c_0\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_\Omega\left[u_y^2+\left(c\left(x_j\right)+\lambda\right)u^2\right]dxdy + \int_\Omega\left(c_0\delta_0^2-|k(y)|\right)u_x^2 dxdy. \quad (1.19)$$

Здесь выберем $c_0 > 0$ так, что $c_0\delta_0^2 > \frac{3}{2}\cdot m,\ m = \max\limits_{-1\le y\le 1}|k(y)|$.

Тогда

$$\left(c_0+\frac{1}{2\varepsilon}\right)\left\|\left(L_j+\lambda E\right)u\right\|_2^2 \ge \frac{1}{2}\int_\Omega\left[u_y^2+u_x^2+\left(c\left(x_j\right)+\lambda\right)u^2\right]dxdy \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int_\Omega\left[u_y^2+u_x^2+u^2\right]dxdy = \frac{1}{2}\|u\|_{2,1}^2. \quad (1.20)$$

Пункт *a)* утверждения 1.1 доказан.

Существование $\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}$ и ограниченность на $R\left(L_j+\lambda E\right)$ следует из (1.20). Осталось показать существование правого обратного оператора. Для этого рассмотрим уравнение

$$L_j u + \lambda u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a\left(x_j\right)u_x + c\left(x_j\right) + \lambda u = f \in C_0^\infty\left(\Omega\right). \quad (1.21)$$

Применяя преобразование Фурье по *x*, получаем что

$$\ell_{j,t}\tilde{u} + \lambda\tilde{u} = -\tilde{u}_{yy} + \left(-k(y)t^2 + ita\left(x_j\right) + c\left(x_j\right) + \lambda\right)\tilde{u} = \tilde{f}\left(t,y\right), \quad (1.22)$$

где

$$\tilde{u}(t,y) = \underset{x\to t}{F}u(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R u(x,y)e^{-ixt}dx;$$

$$\tilde{f}(t,y) = \underset{x\to t}{F}f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_R f(x,y)e^{-itx}dx.$$

Из леммы 1.2 следует, что

$$\tilde{u} = \left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}. \quad (1.23)$$

Далее, используя обратный оператор $\underset{t\to x}{F}^{-1}$, имеем

$$u(x,y)=\underset{t\to x}{F}^{-1}\,\tilde{u}=\underset{t\to x}{F}^{-1}\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}$$

или

$$u(x,y)=\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}f=\underset{t\to x}{F}^{-1}\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\,. \qquad (1.24)$$

Нетрудно проверить, что оператор $\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}$ имеет непрерывное продолжение в $L_2(\Omega)$.

Утверждение 1.1 полностью доказано.

*Доказательство утверждения 1.2.* Из (1.24), пользуясь свойствами преобразования Фурье, получаем, что

$$\|u\|_2^2=\left\|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}f\right\|_2^2=\left\langle \underset{t\to x}{F}^{-1}\left(l_t+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f},\underset{t\to x}{F}^{-1}\left(l_t+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}\right\rangle=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1\left|\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right|^2dy\right)dt\le\sup_{t\in R}\left\|\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_{2\to 2}^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\left|\tilde{f}(t,y)\right|^2dydt\,.$$

Отсюда и из леммы 1.2 находим

$$\left\|\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2\le\frac{c_0}{\left(c\left(x_j\right)+\lambda\right)^2},\ c_0=4\pi\,. \qquad (1.25)$$

Пункт *а)* утверждения 1.2 доказан. Здесь мы воспользовались свойствами преобразования Фурье в пространстве $L_2$.

Рассмотрим

$$u_x=D_x\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}f=\frac{\partial}{\partial x}\underset{t\to x}{F}^{-1}\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)e^{ixt}dt=\underset{t\to x}{F}^{-1}(it)\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\,.$$

$$\|u_x\|_2^2=\left\langle \underset{t\to x}{F}^{-1}\left(-it\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(x,y)\right),\underset{t\to x}{F}^{-1}\left(-it\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(x,y)\right)\right\rangle=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left\|-it\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\|_2^2\right)dt\le\sup_{t\in R}\left\|-it\left(l_{j,t}+\lambda E\right)^{-1}\right\|_2^2\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1\left|\tilde{f}(t,y)\right|^2dy\right)dt\,.$$

В силу пункта *а)* леммы 1.1 получаем, что

$$\left\|D_x\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}f\right\|_2^2\le\frac{c_1}{\left|a(x_j)\right|^2}\|f\|_2^2,$$

где $c_1=2\pi$.

Последнее неравенство доказывает пункт *б)* утверждения 1.2.

Непосредственно вычисляя, получим

$$D_y(L+\lambda E)^{-1}f=\frac{\partial}{\partial y}\underset{t\to x}{F}^{-1}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)e^{ixt}dt=\underset{t\to x}{F}^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\,.$$

Теперь оценим норму

$$\left\|D_y(L_j+\lambda E)^{-1}f\right\|_2^2=\left\langle \underset{t\to x}{F}^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y),\underset{t\to x}{F}^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\rangle=$$

$$=\left\langle \frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y),\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\tilde{f}(t,y)\right\rangle=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_0^1\left|\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\widetilde{f}(t,y)dy\right|^2\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\widetilde{f}\right\|_2^2 dt \le$$

$$\le \sup_{t\in R}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty}\left\|\widetilde{f}(t,y)\right\|_2^2 dt \le 2\pi\cdot\sup_{t\in R}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(l_{j,t}+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\|f\|_2^2 .$$

Отсюда, в силу пункта *в)* леммы 1.1, имеем

$$\left\|D_y(L_j+\lambda E)^{-1}f\right\|_2^2 \le \frac{c_2}{(c(x_j)+\lambda)}\|f\|_2^2,\ c_2 = 2\pi .$$

Из последнего неравенства следует доказательство утверждения 1.2.

*2. Построение правого обратного оператора для оператора* $(L+\lambda E)$

В дальнейшем нам будет нужна следующая лемма о покрытии.

**Лемма 2.1.** Пусть выполнены условия *i)- iii)*. Тогда существует такое покрытие

1) $\sum_{\{j\}}\varphi_j^2 \equiv 1,\ \varphi_j \in C_0^\infty(\Delta_j),\ \bigcup_j \Delta_j = R$;

2) $\left\|D_x^\alpha\varphi_j\right\|_{C(R)} \le \dfrac{c}{b^\alpha d_x^\alpha},\alpha = 0{,}1$;

3) $\dfrac{1}{2(\tau+1)} \le \dfrac{c(x)}{c(t)} \le 2(\tau+1)$ при $|x-t| \le bd(t)$; $d(t) = \dfrac{1}{[c(t)]^{\frac{1}{2}}}, b>0,\ \tau>0$.

4) Каждое множество $\Delta_j$ может пересекаться не более чем с тремя множествами из семейства $\{\Delta_j\}_{j\ge1}$.

*Доказательство.* Доказательство леммы проводится аналогичным образом, как в работах [6–8].

Теперь определим оператор $Kf = \sum_{\{j\}}\varphi_j\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f$; $f\in C_0^\infty(\Omega)$.

Непосредственно можно проверить, что оператор *К* ограниченный и допускает замыкание в $L_2(\Omega)$ и $Kf \subseteq D(L)$.

Действуя на $Kf$ оператором $(L+\lambda E)$, имеем

$$(L+\lambda E)Kf = (L+\lambda E)\sum_{\{j\}}\phi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f = f + Af + Bf, \tag{2.1}$$

где

$$Af = \sum_{\{j\}}\phi_j(a(x)-a(x_j))((L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f)_x + \sum_{\{j\}}\phi_j(c(x)-c(x_j))((L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f; \tag{2.2}$$

$$Bf = \sum_{\{j\}}\phi_{j_x}a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f + \sum_{\{j\}}\phi_{j_{xx}}(L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f + 2\sum_{\{j\}}\phi_{j_x}((L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f)_x. \tag{2.3}$$

Итак, нами доказана следующая

**Лемма 2.2.** Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда для любой функции $f\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливо равенство

$$(L+\lambda E)Kf = [E+A+B]f, \tag{2.4}$$

где операторы *A, B* определяются по формулам (2.2)–(2.3).

**Лемма 2.3.** Пусть выполнены условия *i)- iii)*. Тогда найдутся числа $\tau_0$ и $b_0$ такие, что, если $a(x), c(x) \in K(\tau, b)$ при некоторых $\tau\in(0,\tau_0)$ и $b > b_0$, то операторы А и В будут ограничены, причем $\|A+B\|_{2\to2} < 1$.

**Лемма 2.4.** Пусть выполнены условия *i)- iii),* и пусть $\|A+B\|_{2\to2} < 1$. Тогда

$$(L+\lambda E)_{np}^{-1} = K[E+A+B]^{-1}, \tag{2.5}$$

где $(L+\lambda E)^{-1}_{np}$ — правый обратный оператор оператора $(L+\lambda E)$.

*Доказательство.* По предположению леммы 2.3 $\|A+B\|_{2\to 2}<1$. Пользуясь этим неравенством и равенством (2.4), приходим к представлению (2.5).

*Доказательство леммы 2.3.* Оценим норму оператора $A$ в $L_2$. Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно.

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2=$$

$$=\int_\Omega\left|\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right|^2dxdy=$$

$$=\sum_{\{j\}}\int_{\Omega_j}\left|\sum_{j-1}^{j+1}\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right|^2dxdy. \qquad (2.6)$$

Здесь мы воспользовались тем, что на $\Omega_j$ количество $\varphi_j$, отличных от нуля, не больше трех. Далее, согласно утверждению 1.2 и лемме 2.1, из (2.6) имеем

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le 12\sum_{\{j\}}\left\|\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le$$

$$\le 12\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\left|a(x)-a(x_j)\right|^2\left\|D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f\right\|_2^2\le 12\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{\left|a(x)-a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2}\|f\|_2^2. \qquad (2.7)$$

Теперь оценим норму второго слагаемого оператора $A$. Здесь, учитывая утверждение 1.2 и повторяя выкладки, использованные при доказательстве неравенства (2.7), можно убедиться, что

$$\left\|\sum_{\{j\}}\phi_j\left(c(x)-c(x_j)\right)\left(L_j+\lambda \mathrm{E}\right)^{-1}\phi_j f\right\|_2^2\le 12\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{\left|c(x)-c(x_j)^2\right|}{c^2(x_j)}\sum_{\{j\}}\left\|\phi_j f\right\|_2^2.$$

Так как $\sum_{\{j\}}\left\|\varphi_j f\right\|_2^2=\|f\|_2^2$, то из последнего неравенства получим

$$\left\|\sum_{\{j\}}\phi_j\left(c(x)-c(x_j)\right)\left(L_j+\lambda \mathrm{E}\right)^{-1}\phi_j f\right\|_2^2\le 12\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{\left|c(x)-c(x_j)^2\right|}{c^2(x_j)}\|f\|_2^2. \qquad (2.8)$$

С помощью неравенств (2.7) и (2.8) находим

$$\|Af\|_2^2=\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(a(x)-a(x_j))D_x(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f+\sum_{\{j\}}\varphi_j(c(x)-c(x_j))D_x(L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f\right\|_2^2\le$$

$$\le 24\left[\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{\left|a(x)-a(x_j)\right|^2}{\left|a(x_j)\right|^2}+\sup_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{\left|c(x)-c(x_j)\right|^2}{c^2(x_j)}\right]\|f\|_2^2. \qquad (2.9)$$

Теперь оценим норму оператора $B$. Рассмотрим первое слагаемое. Согласно лемме 2.1 и утверждению 1.2 имеем

$$\left\|\sum_{\{j\}}\phi_{j_x}a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\phi_j f\right\|_2^2\le 12\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\bar\Delta_j}\frac{c^2\left|a(x)\right|^2}{b^2d_j^2}\left\|(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\left\|\phi_j f\right\|_2^2.$$

Отсюда и в силу пункта $a)$ утверждения 1.2 получаем

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} a(x)(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f \right\|_2^2 \le 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^2|a(x)|^2}{b^2 d_j^2\cdot(c(x_j)+\lambda)^2}\|f\|_2^2 . \quad (2.10)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое оператора $B$:

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} (L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j f \right\|_2^2 \le 12 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^4}{b^4 d_j^4 (c(x_j)+\lambda)^2}\|f\|_2^2 . \quad (2.11)$$

Для третьего слагаемого оператора $B,$ непосредственно вычисляя, получаем, что

$$\left\| 2\sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} D_x (L+\lambda E)^{-1}\varphi_j f \right\|_2^2 \le 24 \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^2}{b^2 d_j^2 |a(x_j)|^2}\|f\|_2^2 . \quad (2.12)$$

В результате (2.10) – (2.12) получаем, что

$$\|B\|_2^2 \le 12\left[ \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^2|a(x)|^2}{b^2 d_j{}^2\left(c(x_j)+\lambda\right)^2} + \sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^4|a(x)|^2}{b^4 d_j{}^4\left(c(x_j)+\lambda\right)^2} + 2\sup_{\{j\}} \sup_{x\in\bar{\Delta}_j} \frac{c^2}{b^2 d_j{}^2 |a(x_j)|^2} \right]. \quad (2.13)$$

Для справедливости леммы 2.3 теперь надо брать $\tau_0$ и $b_0$ так, чтобы $\|A+B\|<1$.

Далее предположим

$$\tilde{a}(x)=\sum_{\{j\}} a(x_j)\varphi_j^2,\ \ \tilde{c}(x)=\sum_{\{j\}} c(x_j)\varphi_j^2 ;$$

$$\left(\tilde{L}+\lambda E\right)u = u_{xx}-u_{yy}+\tilde{a}(x)u_x+\tilde{c}(x)u+\lambda u,\ \ u\in C_0^\infty(\Omega) ;$$

$$\left(\tilde{L}'+\lambda E\right)u = u_{xx}-u_{yy}-\tilde{a}(x)u_x+\tilde{c}(x)u-\left(\tilde{a}(x)\right)'_x u+\lambda u,\ \ u\in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\tilde{L}'$ — формально сопряженный оператор. Заметим, что на функциях $u,\upsilon\in C_0^\infty(\Omega)$ выполняется равенство

$$\left\langle \tilde{L}u,\upsilon \right\rangle = \left\langle u,\tilde{L}'\upsilon \right\rangle; \qquad u,\upsilon\in C_0^\infty(\Omega).$$

Введем оператор

$$M^{\#} f = \sum_{\{j\}} \varphi_j \left(L_j^{\#}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f, \quad f\in C_0^\infty(\Omega).$$

где $L_j^{\#^{-1}}$ — оператор, обратный к оператору $L_j^{\#}u = u_{xx}-u_{yy}-a(x_j)u_x+c(x_j)u,\ u\in C_0^\infty(\Omega)$.

**Лемма 2.5.** Пусть выполнены условия *i)- ii)*. Тогда для любой функции $f\in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы равенства

$$\left(\tilde{L}+\lambda E\right)Kf = \left[E+A_1+B_1\right]f ; \quad (2.14)$$

$$\left(\tilde{L}'+\lambda E\right)M^{\#}f = \left[E+A_2+B_2\right]f, \quad (2.15)$$

где

$$A_1 f = \sum_{\{j\}} \phi_j\left(\tilde{a}(x)-a(x_j)\right)\left[\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f\right]_x + \sum_{\{j\}} \phi_j\left(\tilde{c}(x)-c(x_j)\right)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f ;$$

$$B_1 f = \sum_{\{j\}} \phi_{jx}\tilde{a}(x)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f + \sum_{\{j\}} \phi_{jxx}\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f + 2\sum_{\{j\}} \phi_{jx}\left[\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f\right]_x ;$$

$$A_2 f = \sum_{\{j\}} \phi_j\left(a(x_j)-\tilde{a}(x)\right)\left[\left(L_j^{\#}+\lambda E\right)^{-1}\phi_j f\right]_x ;$$

$$B_2 f = \sum_{\{j\}} \tilde{a}(x)\varphi_{j_x}\left(L_j^{\#}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f - \sum_{\{j\}} \varphi_j\left(\tilde{a}(x)\right)_x\left(L_j^{\#}+\lambda E\right)^{-1}\varphi_j f .$$

Здесь учтено, что $\varphi_{j_{yy}}=0$, $\varphi_{j_y}=0$.

*Доказательство.* Действуя на $Kf$ оператором $\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)$, имеем

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)Kf=\left[E+A_1+B_1\right]f.$$

Точно так же, действуя оператором $\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)$ на $M^{\#}f$, получаем, что

$$\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)M^{\#}f=f+\left(A_2+B_2\right)f.$$

**Лемма 2.6.** Пусть выполнены условия *i)- iii)*. Тогда найдутся числа $\tau_0$ и $b_0$ такие, что, если $a(x),c(x)\in K(\tau,b)$ при некоторых $\tau\in(0,\tau_0)$ и $b>b_0$, то существуют операторы $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$ с нормами $\|A_i+B_i\|_2<\frac{1}{2}$, $i=1,2$ такие, что выполняются равенства

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)_{np}^{-1}=K\left[E+A_1+B_1\right]^{-1}; \tag{2.16}$$

$$\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)_{np}^{-1}=M^{\#}\left[E+A_2+B_2\right]^{-1}, \tag{2.17}$$

где $\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)_{np}^{-1}$, $\left(\widetilde{L}'+\lambda E\right)_{np}^{-1}$ — операторы, правые обратные, соответственно к операторам $\widetilde{L}+\lambda E$, $\widetilde{L}'+\lambda E$.

*Доказательство.* Оценим $\|A_1\|_2$. Для этого в силу леммы 2.3 распишем оператор $A_1$

$$\|A_1f\|_2^2=\left\|\sum_{\{j\}}\phi_j\left(\tilde{a}(x)-a(x_j)\right)\left[\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_jf\right]_x+\sum_{\{j\}}\phi_j\left(\tilde{c}(x)-c(x_j)\right)\left(L_j+\lambda E\right)^{-1}\phi_jf\right\|_2^2. \tag{2.18}$$

Оценим норму оператора $A$ в $L_2$. Для этого будем оценивать каждое слагаемое отдельно. Используя утверждения 1.2, получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\widetilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_jf\right\|_2^2=$$

$$=\sum_{\{j\}}\int_{\Omega_j}\left|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\widetilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_jf\right|^2dxdy.$$

Здесь мы воспользовались тем, что на $\Omega_j$ количество $\phi_j$, отличных от нуля, не больше трех, где

$$\Omega_j=\left\{(x,y):x\in\Delta_j,0<y<1\right\}.$$

На основании сказанного выше из (2.8) имеем

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\widetilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_jf\right\|_2^2\le$$

$$\le 12\sum_{\{j\}}\sup_{x\in\overline{\Delta}_j}\left|\widetilde{a}(x)-a(x_j)\right|^2\left\|D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\right\|_2^2\cdot\left\|\varphi_jf\right\|_2^2. \tag{2.19}$$

Согласно лемме 2.1 $\sum\limits_{j-1}^{j+1}\varphi_j^2\equiv1$, $x\in\overline{\Delta}_j$. Учитывая это и условия *i)-iii)*, имеем

$$\left|\widetilde{a}(x)-a(x_j)\right|=\left|\sum_{j-1}^{j+1}a(x_j)\varphi_j^2-a(x_j)\right|=\left|\sum_{j-1}^{j+1}a(x_j)\varphi_j^2-a(x_j)\sum_{j-1}^{j+1}\varphi_j^2\right|\le2\tau(2+\tau)\left|a(x_j)\right|. \tag{2.20}$$

Из неравенства (2.19) с помощью неравенств пункта *б)* утверждения 1.2 и равенства (2.20) получаем, что

$$\left\|\sum_{\{j\}}\varphi_j(\widetilde{a}(x)-a(x_j))D_x(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_jf\right\|_2^2\le48\tau^2(2+\tau)^2\|f\|_2^2. \tag{2.21}$$

Далее, повторяя выкладки и рассуждения, использованные при доказательстве неравенства (2.21), находим, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_j (\tilde{c}(x) - a(x_j))(L_j + \lambda E)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le 48\tau^3 (2+\tau)^2 \|f\|_2^2 . \qquad (2.22)$$

В результате из равенства (2.18) с помощью (2.21) – (2.22) получаем неравенство

$$\|A_1 f\|_2^2 \le 48\left(\tau^2 (2+\tau)^2 + \tau^3 (2+\tau)^2\right)\|f\|_2^2 . \qquad (2.23)$$

Отсюда

$$\|A_1\|_{2\to 2}^2 \le 48\left(\tau^2 (2+\tau)^2 + \tau^3 (2+\tau)^2\right). \qquad (2.24)$$

Оценим норму оператора $B_1$. Рассмотрим первое слагаемое:

$$\left\| \sum_{\{j\}} \phi_{jx} \tilde{a}(x) \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \phi_j f \right\|_2^2 \le 12 \sum_{\{j\}} \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2 |\tilde{a}(x)|^2}{b^2 d_j^2} \left\| \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \|\phi_j f\|_2^2 \le$$

$$\le 12 \sup_{\{j\}} \left( \sup_{x \in \bar{\Delta}_j} \frac{c^2 |\tilde{a}(x)|^2}{b^2 d_j^2} \right) \frac{1}{\left(c(x_j) + \lambda\right)^2} \|f\|_2^2 . \qquad (2.25)$$

С другой стороны, имеем

$$|\tilde{a}(x)| = \left| \sum_{j-1}^{j+1} a(x_j) \varphi_j \right| \le |a(x_{j-1})| + |a(x_j)| + |a(x_{j+1})|$$

при $x \in \bar{\Delta}_j$. Отсюда и согласно лемме 2.1 получим

$$|\tilde{a}(x)| \le 3\sqrt{1+\tau}\, |a(x_j)| . \qquad (2.26)$$

В результате из (2.25) с помощью (2.26) получаем, что

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} \tilde{a}(x) \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le 12 \sup_{\{j\}} \frac{9c^2 (1+\tau) |a(x_j)|^2}{b^2 d_j^2 \left(c(x_j) + \lambda\right)^2} \|f\|_2^2 . \qquad (2.27)$$

Далее, пользуясь оценкой $a)$ утверждения 1.2, непосредственно вычисляя, имеем:

$$\left\| \sum_{\{j\}} \varphi_{j_{xx}} \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le 12 \sum_{\{j\}} \left\| \varphi_{j_{xx}} \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le$$

$$\le 12 \sum_{\{j\}} \max_{x \in \bar{\Delta}_j} |\phi_{jxx}|^2 \left\| \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \right\|_2^2 \cdot \|\phi_j f\|_2^2 \le 12 \sup_{\{j\}} \frac{c^4}{b^4 d_j^4} \cdot \frac{1}{\left(c(x_j) + \lambda\right)^2} \|f\|_2^2 , \qquad (2.28)$$

где $c = \sup_j \left\{ \sup_{x \in R} \varphi_j(x) \right\}$.

Точно так же

$$\left\| 2 \sum_{\{j\}} \varphi_{j_x} D_x \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} \varphi_j f \right\|_2^2 \le 48 \sup_{\{j\}} \frac{c^2}{b^2 d_j^2} \cdot \frac{1}{a^2(x_j)} \|f\|_2^2 . \qquad (2.29)$$

Неравенства (2.27)-(2.29) дают

$$\|B_1\|_{2\to 2}^2 \le \left( 12 \sup_{\{j\}} \frac{9c^2 (1+\tau) |a(x_j)|^2}{b^2 d_j^2 \left(c(x_j) + \lambda\right)^2} + 12 \sup_{\{j\}} \frac{c^4}{b^4 d_j^4} \cdot \frac{1}{\left(c(x_j) + \lambda\right)^2} + 48 \sup_{\{j\}} \frac{c^2}{b^2 d_j^2 |a(x_j)|^2} \right), \qquad (2.30)$$

где $c > 0$ — постоянное число.

Теперь для справедливости леммы 2.3 выберем $\tau$ и $b$ так, чтобы

$$\|A_1 + B_1\|_{2\to 2} \le \|A_1\|_{2\to 2} + \|B_1\|_{2\to 2} < \frac{1}{2} . \qquad (2.31)$$

Точно так же

$$\|A_2 + B_2\|_{2\to 2} < \frac{1}{2} . \qquad (2.32)$$

Эта оценка доказывается таким же путем, как (2.31).

**Лемма 2.7.** Пусть выполнены условия леммы 2.6. Тогда справедливо равенство

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)^{-1}=K\left[E+A_1+B_1\right]^{-1}. \tag{2.33}$$

*Доказательство.* Из общей теории операторов известны следующие утверждения:

$$L_2(\Omega)=R(\widetilde{L})\dotplus N(\widetilde{L}^*),\ L_2(\Omega)=R(\widetilde{L}')\dotplus N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right),$$

где $\dotplus$ — ортогональное дополнение, $N(\widetilde{L}^*)=Ker\widetilde{L}^*$, $N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)=Ker\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)$.

Из равенств (2.16), (2.18) следует, что

$$N(\widetilde{L}^*)\equiv 0,\ N\left(\left(\widetilde{L}'\right)^*\right)\equiv 0. \tag{2.34}$$

Так как $D\left(\tilde{L}\right)\subseteq D\left(\left(\tilde{L}'\right)^*\right)$, то из равенства (2.34) следует, что

$$N(\widetilde{L})\equiv 0. \tag{2.35}$$

Учитывая (2.35), из (2.17) имеем

$$\left(\widetilde{L}+\lambda E\right)^{-1}=K\left[E+A_1+B_1\right]^{-1}.$$

Лемма 2.7 доказана.

**Лемма 2.8.** Пусть выполнены условия леммы 2.7. Тогда $KerK\equiv 0$.

*Доказательство.* Поскольку $Ker\left[E+A_1+B_1\right]\equiv 0$, то из (2.33) и (2.35) следует, что $KerK\equiv 0$. Лемма 2.8 доказана.

**Лемма 2.9.** Пусть выполнены условия утверждения 1.2. Тогда оператор $L$ допускает замыкание.

*Доказательство.* Пусть $u_n\to 0,\ Lu_n\to \upsilon$ $\left(u\in L_2(\Omega),\ u_n\in C_0^\infty(\Omega),\ n=1,2,...\right)$. Из леммы 2.8 следует, что $u_n$ представима в виде $K\upsilon_n\in L_2(\Omega)$, так как $C_0^\infty(\Omega)\subset D(\widetilde{L})=R(K)$. Поэтому при $n\to\infty$ имеем

$$Lu_n=LK\upsilon_n=\left[E+A+B\right]\upsilon_n\to\upsilon.$$

Отсюда

$$\upsilon_n\to\left[E+A+B\right]^{-1}\upsilon,\ K\upsilon_n\to K\left[E+A+B\right]^{-1}\upsilon.$$

Из того, что $u_n=K\upsilon_n\to 0$, получаем $K\left[E+A+B\right]^{-1}\upsilon=0$. Откуда заключаем $\upsilon=0$. Лемма доказана.

**Лемма 2.10.** Пусть выполнены условия леммы 2.6. Тогда $KerL\equiv 0$.

*Доказательство.* Пусть $Lu=0$, $u\in D(L),\ u\neq 0$. Тогда для этой функции существует последовательность $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что

$$u_n\to u,\ Lu_n\to Lu,\ u_n\in C_0^\infty(\Omega)\subset D(L).$$

Теперь, используя представление $u_n=K\upsilon_n$, $\upsilon_n\in L_2(\Omega)$, получаем, что

$$Lu_n=LK\upsilon_n=\left[E+A+B\right]\upsilon_n\to 0 \tag{2.36}$$

при $n\to\infty$. Поскольку $Ker\left[E+A+B\right]\equiv 0$, то из (2.36) следует, что $\upsilon_n\to 0$. Из представления $u_n=K\upsilon_n$ получаем, что $u_n\to 0$. Следовательно, $u=0$. Лемма доказана.

*Доказательства теорем 1–3.* Доказательства теорем 1 и 2 следуют из лемм 2.9 и 2.10. Теорема 3 доказывается с помощью утверждений 1.1–1.2 и лемм 2.9 и 2.10.

## References


1. *Smyrnov M.M.* Equations of mixed type. — M.: High school, 1985. — 296 p.
2. *Nahushev A.M.* The Methods of the stating the correct marginal problems for linear hyperbolic equations of the second order on planes // Differential equations. — 1970. — T. 6. — P. 192—195.
3. *Muratbekov M.B.* Divisibility of operator of the mixed type and fullness of his system of root vector // Differential equations. — 1991. — T. 27. — № 16. — P. 2127—2137.
4. *Kal'menov T.Sh., Muratbekov M.B.* Special characteristic of the operator of mixed type. — Shymkent: YuKGU, «Gylym», 1997. — 80 p.

5. *Muratbekov M.* Two-sides estimates of the distribution function of s-values of a class of mixed type differential operators // Complex Variables and Elliptic Equations. — 2007. — Vol. 52. — №12.
6. *Boymatov K.Kh.* The Theory of divisibility // is GIVEN by SSSR. — 1973. — T. 213. — 5. — P. 1009—1011.
7. *Feigin V.I.* The Noether property of differential operators in $R^n$ // English transl. in Differential Equations. — 1975. — №11. — P. 2231—2235.
8. *Otelbaev M.* Coercive estimates and separation theorems for elliptic equations in $R^n$ // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. — 1984. — Issue 3. — P. 213—239.

УДК 517. 984/984.68

# О существовании и единственности решений одного класса сингулярных уравнений смешанного типа

# About existence and unique decisions of one class singular equations of the mixed type

Муратбеков М.Б., Медетбеков Б.М., Игисинов С.Ж.

*Таразский институт Международного казахско-турецкого университета им. А. Ясауи (e-mail: iqisinovsabit@mail.ru)*

Аралас типті сингулярлы дифференциалдық теңдеулердің бір класы қарастырылды. Шенелмеген облыс жағдайында шешімнің бар болуы мен жалғыздығы дәлелденді. Сонымен қатар осы шешімнің бағалары алынып, шешімді құру әдісі көрсетілді.

The class of singular equation of mixed type is considered. For unlimited area the existence and singles of solving is proved. Also estimations of this decisions are received. The method of construction of solving is expounded.

*Формулировка результатов*

Известно, что в случае неограниченной области свойства решений эллиптических уравнений исследованы достаточно полно. В то же время для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа этим вопросам посвящено гораздо меньше работ, а изучение их началось сравнительно недавно [1–4].

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u = f(x, y), \quad f(x, y) \in L_2(R^2), \tag{1}$$

где $k(y)$ – кусочно-непрерывная, ограниченная функция, $yk(y) > 0$ при $y \neq 0$ и $k(0) = 0$.

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $a(y)$, $c(y)$ удовлетворяют условию

*i)* $|a(y)| \geq \delta_0 > 0,\ c(y) \geq \delta > 0$ – непрерывные функции в $R(-\infty, \infty)$.

**Теорема 1.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для уравнения (1) при любой $f(x, y) \in L_2(R^2)$ существует единственное решение $u(x, y) \in L_2(R^2)$.

**Теорема 2.** Пусть выполнено условие *i*). Тогда для любого решения $u(x, y)$ уравнения справедлива оценка

$$\|u_x\|_2 + \|u_y\|_2 + \left\|\sqrt{c(y)}\, u\right\|_2 \leq c\|f\|_2,$$

где $c > 0$ – постоянное число.

На $C_0^\infty(R^2)$ положим

$$L_0 u = k(y)u_{xx} - u_{yy} + a(y)u_x + c(y)u + \lambda u .$$

Нетрудно проверить, что оператор $L_0$ допускает замыкание, и обозначим его через $L$.