

С.А.Искаков

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

### МЕТОД ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Төртінші ретті теңдеудің шешімі үшін фиктивті облыстар әдісімен екі жақты бағалар келтірілген және негізделген. Жуық шешімнің дәрежелік қатарға жеткілікті аз параметрі бойынша жіктелуі қолданылады. Алынған екі жақты бағалар арқылы дәл шешімді жоғарыдан да, төменнен де бағалауға болады. Ричардсонның экстраполяциясын қолдануы жуық шешімнің дәлдігінің ретін жоғарлатады.

In the article bilateral estimations for the decision of the biharmonic equation are resulted and proved. Decomposition of the approached decision in degree a number by small parameter is used. The taken mutual marks let to valuation exact solution as on the up and as on the down. Using Richardson's extrapolation makes higher order exactlyes of approach solution.

Математическая задача о поперечном изгибе тонкой пластины приводит к решению уравнения

$$Au \equiv \Delta^2 u + au = f(x), \quad x \in D \subset R^2, \quad (1)$$

с краевым условием на  $\gamma = \partial D$ :

либо

$$B_0 u|_{\gamma} \equiv 0, \quad B_1 u|_{\gamma} \equiv \frac{\partial u}{\partial n}|_{\gamma} = 0, \quad (2)$$

или

$$B_2 u|_{\gamma} \equiv \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} + \sigma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial n} \right) \right]_{\gamma} = 0, \quad (3)$$

$$B_3 u|_{\gamma} \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial n} \Delta u + (1 - \sigma) \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial n \partial s} \right]_{\gamma} = 0, \quad (4)$$

здесь  $u = u(x)$  — поперечный изгиб серединной плоскости пластины;  $f = f(x)$  — интенсивность внешней нагрузки;  $\frac{\partial}{\partial n}$  — производная по внутренней нормальной к  $\gamma$ ;  $\frac{\partial}{\partial s}$  обозначает дифференцирование по длине дуги  $\gamma$ ;  $\sigma \in (0,1)$  — постоянная Пуассона;  $\rho = \rho(x)$  — радиус кривизны  $\gamma$  в точке  $x \in \gamma$ .

Краевые условия (3), (4) для уравнения (1) называются естественными краевыми условиями, а условия (2), (3) — главными краевыми условиями.

Для уравнения рассмотрим следующие краевые задачи: задача I — задача (1), (2), (4) — задача об изгибе тонкой пластины, шарнирно закрепленной; задача II — задача (1), (3), (4) — задача об изгибе тонкой пластины со свободной границей.

Будем считать, что функция  $a(x)$  в уравнения (1) ограничена, положительна  $a(x) \geq a_0 > 0$ .

В дальнейшем будем использовать формулу преобразования  $\int_D \Delta^2 u v dx$  следующим образом. В формуле интегрирования по частям

$$I = \int_D \Delta \Delta u v dx = \oint_{\gamma} \left[ \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \cos(n, x_1) + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \cos(n, x_2) + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \cos(n, x_2) \right] v d\sigma - \int_D \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx,$$

где  $n$  — нормаль к границе. Поверхностный интеграл добавлением и вычитанием в подынтегральном выражении слагаемого  $\frac{\partial^3 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cos(n, x_1)$  преобразуем к виду

$$\oint_{\gamma} \left[ \frac{\partial}{\partial n} \Delta u - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right] v d\sigma,$$

здесь  $\frac{\partial}{\partial \tau}$  — производная по касательной к  $\gamma$ . При этом использовались соотношения  $n_1 = \tau_2$ ,  $n_2 = \tau_1$  для компонент нормального и касательного векторов к  $\gamma$ . Интегрируем по частям обычный интеграл по  $D$ .

$$\begin{aligned} & \int_D \left( \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} \frac{\partial v}{\partial x_1} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx = \\ & = \oint_{\gamma} \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \cos(n, x_1) + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \cos(n, x_1) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \cos(n, x_2) \right] d\delta - \\ & - \int_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Предполагая, что  $\gamma$  дважды непрерывно дифференцируемая кривая, обозначим через  $\omega_\sigma$  внутреннюю приграничную полосу шириной  $\delta$ . Считаем  $\delta$  достаточно малой величиной, а внутреннюю границу  $\omega_\sigma$  обозначим через  $s$ .

В  $\omega_\sigma$  введем приграничную систему координат  $(s, n)$ , где  $s$  — длина дуги между некоторой точкой на  $S$  — началом координат и основанием нормали, опущенной из данной точки на  $S$ , а  $n$  — расстояние от точки до кривой  $s$ . При этом на  $s$  задается направление отсчета дуг.

Пусть теперь  $x_n = g_1(s)$ ,  $x_2 = g_2(s)$  параметрическое представление, тогда координаты точки из  $\omega_\delta$  в системе  $(x_1, x_2)$  и  $(s, n)$  связаны так:

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(s) + n_1(s) \cdot n, \\ x_2 &= g_2(s) + n_2(s) \cdot n, \end{aligned}$$

где  $n_1, n_2$  — координаты внутренней нормали  $\bar{n}$  к  $\gamma$ .

После элементарных выкладок получим

$$\begin{aligned} \int_D \Delta \Delta u v dx &= \int_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx + \\ &+ \oint_{\gamma} \left[ \left( \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial n} - k \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial s} \right) v - \left( \Delta u + \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial s} - k \frac{\partial u}{\partial n} \right) \frac{\partial v}{\partial n} \right] d\sigma, \end{aligned}$$

где  $k(s)$  — кривизна кривой  $\gamma$ .

Укажем для задачи I интегральное тождество, определяющее ее обобщенное решение.

Обобщенным решением задачи I является функция  $u \in \overset{\circ}{W}_2^2(D)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$b(u, \Phi) = (f, \Phi)$$

для произвольной функции  $\Phi(x) \in \overset{\circ}{W}_2^2(D)$ , где

$$b(u, \Phi) = \int_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right) dx + \int_D a \Phi dx.$$

Далее, в соответствии с методом фиктивных областей [1–3] дополним область  $D$  некоторой областью  $D_1$  до области  $D_0 = D \cup D_1$  с границей  $\Gamma = \partial D_0$  и рассмотрим вспомогательную задачу

$$\begin{aligned} \Delta u_\varepsilon + a u_\varepsilon &= f, \quad x \in D, \\ \varepsilon \Delta u_\varepsilon + \frac{a}{\varepsilon} u_\varepsilon &= 0, \quad x \in D_1, \\ u_\varepsilon|_{\Gamma} &= 0, \quad B_2 u_\varepsilon|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

На кривой  $\gamma$  разрыва коэффициентов ставим условия согласования:

$$B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, B_1 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_1 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = \varepsilon B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, B_3 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = \varepsilon B_3 u_\varepsilon|_{\gamma^-}. \quad (6)$$

Введем обозначение  $w = u_\varepsilon - u$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f \in W_2^{-2}(D)$ ,  $u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_2^2(D_0)$ ,  $u \in \overset{\circ}{W}_2^2(D)$ . Тогда имеет место оценка

$$\|u_\varepsilon - u\|_{W_2^2(D)} \leq c \cdot \varepsilon^{1/2-\delta}, \quad (7)$$

где  $c$  — постоянная, не зависит от  $\varepsilon$ , а  $\delta > 0$  малый параметр.

**Доказательство.** Для  $w$  имеем

$$b_1(w, w)_D + \varepsilon b_1(u_\varepsilon, w)_D + a(u_\varepsilon, w)_{D_1} + a(w, w)_D + \frac{a}{\varepsilon}(u_\varepsilon, w)_{D_1} = 0, \quad (8)$$

где  $(u, v)_{D_i} = \int_{D_i} uv dx$ ,  $i = 0, 1$ ,

$$b_1(u, v)_D = \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx + \\ + \sigma \iint_B \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx + \sigma \iint_D \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} \right) dx.$$

В формуле (8), применяя формулу интегрирования по частям, неравенство Коши, неравенство Фридрихса, получим:

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial n} \right\|_{L_2(\gamma)} \leq c \|w\|_{W_2^2(D_1)} \cdot \|w\|_{W_2^1(D_1)}^{1-\delta} \leq c \cdot \left( \frac{1}{\varepsilon} \right)^{\delta/2} \cdot \varepsilon^{\frac{1-\delta}{2}} = c \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}$$

и приходим к оценке (7).

Далее переходим к получению двусторонних оценок для задачи I. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f, x \in D \\ B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, \\ B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, \\ B_j u_\varepsilon|_{\gamma^+} = \frac{Q}{\varepsilon} B_j u_\varepsilon|_{\gamma^-}, j = 1, j = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon} Au_\varepsilon = 0, x \in D_1 \\ B_0 u_\varepsilon|_\Gamma = 0, \\ B_2 u_\varepsilon|_\Gamma = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Здесь  $Q$  — параметр, принимающий значения 1 и  $-1$ . Условия согласования примут вид

$$B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_0 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, B_1 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = \frac{Q}{\varepsilon} B_1 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, \\ B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_2 u_\varepsilon|_{\gamma^-}, B_3 u_\varepsilon|_{\gamma^+} = \frac{Q}{\varepsilon} B_3 u_\varepsilon|_{\gamma^-}. \quad (10)$$

Решения задачи (5), (6) будем искать в виде рядов

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, x \in D, S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k, x \in D_1. \quad (11)$$

Для определения членов  $v_k, y_k$  подставим (7) в уравнения (5). Приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему задач для нахождения  $v_k, y_k$ .

$$\begin{cases} Av_0 = f, x \in D \\ B_0 v_0|_\gamma = 0, \\ B_2 v_0|_\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Ay_1 = 0, x \in D_1 \\ B_2 y_1|_\Gamma = 0, \\ B_0 y_1|_\Gamma = 0, \\ QB_j y_1|_\gamma = B_j v_0|_\gamma, j = 1, j = 3. \end{cases} \quad (12)$$

для  $k \geq 1$

$$\begin{cases} Av_k = 0, x \in D \\ B_i v_k|_\gamma = B_i y_k|_\gamma, i = 0, i = 2 \end{cases} \begin{cases} Ay_{k+1} = 0, x \in D \\ QB_j y_{k+1}|_\gamma = B_j v_k|_\gamma, j = 1, j = 3. \\ B_i y_{k+1}|_\Gamma = 0, i = 0, i = 2 \end{cases} \quad (13)$$

**Теорема 2.** Существует  $\varepsilon_0$  такое, что для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  ряды  $S_1, S_2$ , определенные формулой (11), абсолютно сходятся в  $W_2^2(D), W_2^2(D_1)$  соответственно, и имеет место равенство

$$u_\varepsilon = S_1, x \in D, \quad u_\varepsilon = S_2, \quad x \in D_1, \quad (14)$$

где  $u_\varepsilon$  — решение задачи (5).

**Доказательство.** Из теоремы эллиптических уравнений известно, что при сделанных выше предположениях уравнений из системы (12), (13) имеют единственные решения и для них справедливы оценки, доставляемые теорией неоднородных граничных задач. Отсюда получим абсолютную сходимость рядов  $S_1, S_2$ .

Далее умножим уравнения из системы (12), (13) относительно  $v_k, y_k$  на  $\varepsilon^k$  и просуммируем по всем  $k$ . Учитывая ограниченность оператора  $A$ , имеем, что полученная задача относительно  $S_1, S_2$  совпадает с (5). Поэтому при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$  имеют место равенства (14).

Рассмотрим вспомогательную задачу II.

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f, x \in D, \\ (\varepsilon B_3 u_\varepsilon + u_\varepsilon)|_\gamma = 0, \\ \left( \varepsilon B_2 u_\varepsilon + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right)|_\gamma = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Обобщенным решением задачи (15) называется функция

$$u_\varepsilon(x) \in W_2^2(D),$$

удовлетворяющая интегральному тождеству

$$b(u_\varepsilon, \Phi) + \frac{1}{\varepsilon} \int_\gamma \left( u_\varepsilon \Phi + \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) d\gamma = (f, \Phi) \quad (16)$$

для произвольной функции  $\Phi \in W_2^2(D)$ .

**Теорема 3.** Пусть  $f \in W_2^{-2}(D)$ ,  $u_\varepsilon \in W_2^2(D_0)$ . Тогда справедлива оценка

$$\|u - u_\varepsilon\|_{W_2^2(D)} \leq c\varepsilon, \quad (17)$$

где  $u$  — решение задачи II,  $u_\varepsilon$  — решение задачи (15).

**Доказательство.** Обозначим  $w = u - u_\varepsilon$ , тогда для  $w$  получим задачу

$$Aw = 0, \quad w|_\gamma = \psi, \quad \frac{\partial w}{\partial n}|_\gamma = \varphi, \quad (18)$$

где  $\varphi$  и  $\psi$  таковы, что

$$\|\varphi\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \leq c\varepsilon, \quad \|\psi\|_{L_2(\gamma)} \leq c\varepsilon.$$

По теореме устойчивости по граничным данным обобщенные решения бигармонического уравнения:

$$\|w\|_{W_2^2(D)} \leq c \left( \|\psi\|_{L_2(\gamma)} + \|\varphi\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(\gamma)} \right),$$

откуда и получаем оценку (17).

Получим двусторонние оценки для задачи II по методу фиктивных областей [4]

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f, x \in D, \\ \frac{Q}{\varepsilon} B_i u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_i u_\varepsilon, i = 0, 1, \\ B_j u_\varepsilon|_{\gamma^+} = B_j u_\varepsilon|_{\gamma^-}, j = 2, 3, \end{cases} \begin{cases} \frac{Q}{\varepsilon} Au_\varepsilon = 0, x \in D_1, \\ B_j u_\varepsilon|_\Gamma = 0, j = 2, 3. \end{cases} \quad (19)$$

Решение задачи (19) будем искать в виде рядов

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k, x \in D, S_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k, x \in D_1, \quad (20)$$

Для определения членов  $v_k, y_k$  подставим (20) в уравнения (19). Приравнявая выражения при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получим систему задач для нахождения  $v_k, y_k$ .

$$\begin{cases} Av_0 = f, x \in D, \\ B_i v_0|_\gamma = 0, i = 2, 3, \end{cases} \begin{cases} Ay_1 = 0, x \in D_1, \\ QB_j y_1|_\gamma = B_j v_0|_\gamma, j = 0, 1, \\ B_i y_1|_\Gamma = 0, i = 2, 3, \end{cases} \quad (21)$$

для  $k \geq 1$

$$\begin{cases} Av_k = 0, x \in D, \\ B_i v_k|_\gamma = B_i y_{k-1}|_\gamma, i = 2, 3, \end{cases} \begin{cases} Ay_{k+1} = 0, x \in D_1, \\ QB_j y_{k+1}|_\gamma = B_j v_k|_\gamma, j = 0, 1, \\ B_i y_{k+1}|_\Gamma = 0, i = 2, 3. \end{cases}$$

**Теорема 4.** Существует  $\varepsilon_0$ , что для всех  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  ряды  $S_1, S_2$ , определенные формулой (20), абсолютно сходятся в  $W_2^2(D), W_2^2(D_1)$  соответственно, и имеет место равенство

$$u_\varepsilon = S_1, x \in D; u_\varepsilon = S_2, x \in D_1, \quad (22)$$

где  $u_\varepsilon$  — решения задачи (15).

**Доказательство.** Почти полностью повторяет доказательство теоремы 2.

Обозначим через  $u_\varepsilon^+$  решение вспомогательной задачи (15) с параметром  $Q = 1$ , для которого в силу теоремы 4 имеют место следующие разложения:

$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^+, x \in D; u_\varepsilon^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^+, x \in D_1, \quad (23)$$

где  $v_k^+, y_k^+$  — решения из систем (21) при  $Q = 1$ .

Точно так же для решения  $u_\varepsilon^-$  задачи (15) при  $Q = -1$  справедливы равенства

$$u_\varepsilon^- = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^-, x \in D; u_\varepsilon^- = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^-, x \in D_1. \quad (24)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$v_k^+ = v_k^-, \text{ если } k \text{ — четное; } v_k^+ = -v_k^-, \text{ если } k \text{ — нечетное,} \quad (25)$$

Используя (25), перепишем разложения (23), (24) в исходной области  $D$  в следующем виде:

$$u_\varepsilon^+ = u + \varepsilon v_1^+ + o(\varepsilon^2); u_\varepsilon^- = u - \varepsilon v_1^+ + o(\varepsilon^2), \quad (26)$$

где  $u$  — решение задачи II. Поскольку главные члены погрешностей в разложениях (26) имеют разные знаки, то справедлива

**Теорема 5.** Пусть  $f \in L_2(D)$ ,  $u$  — решение задачи II,  $u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-$  — решение задачи (15), соответствующие выбору  $Q = 1$  и  $Q = -1$ . Тогда для всех  $x \in D$  и  $\varepsilon < \varepsilon_0$  имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства

$$o(\varepsilon^2) + \min\{u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x)\} \leq u(x) \leq \max\{u_\varepsilon^-(x), u_\varepsilon^+(x)\} + o(\varepsilon^2)$$

и оценки точности

$$\max_{x \in D} |u(x) - u_\varepsilon^\pm(x)| \leq c\varepsilon. \quad (27)$$

Точность получаемых двусторонних оценок в данном случае ограничена оценкой (27). Для того чтобы получить двусторонние оценки решения  $u(x)$  с заданной точностью  $\varepsilon^s$ , применим идею экстраполяции Ричардсона. Построим экстраполированные решения  $U_s^\pm$ , являющиеся линейной комбинацией  $u_{\varepsilon_k}^\pm$  с некоторыми весами:

$$U_s^+ = \sum_{k=1}^s \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+, \quad U_s^- = \sum_{k=1}^s \gamma_k u_{\varepsilon_k}^-, \quad (28)$$

$$\varepsilon_k = \frac{\varepsilon}{k}, \quad k = 1, \dots, s, \quad \gamma_k = \frac{(-1)^{s-k} k^s}{k!(s-k)!} \quad (29)$$

и  $\sum_{k=1}^s \gamma_k = 1$ ,  $\sum_{k=1}^s \frac{\gamma_k}{k^j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, s-1$ . Тогда

$$U_s^+ = u + c_1 \varepsilon^s v_s^+ + o(\varepsilon^{s+1}),$$

где  $c_1 = \sum_{j=1}^s \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^s$ .

Аналогично,

$$U_s^- = u + c_1 \varepsilon^s v_s^- + o(\varepsilon^{s+1}).$$

Пусть  $s$  — нечетные, тогда  $v_s^+ = -v_s^-$  и, значит,

$$U_s^+ = u + c_1 \varepsilon^s v_s^+ + o(\varepsilon^{s+1}), \quad (30)$$

$$U_s^- = u - c_1 \varepsilon^s v_s^- + o(\varepsilon^{s+1}).$$

**Теорема 6.** Пусть  $f \in L_2(\bar{D})$ ,  $u$  — решение задачи II,  $u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-$  — решение задачи (14), соответствующие выбору  $Q = 1$  и  $Q = -1$ . Тогда для всех  $x \in D$  и  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства

$$o(\varepsilon^{s+1}) + \min\{U_s^+(x), U_s^-(x)\} \leq u(x) \leq \max\{U_s^-(x), U_s^+(x)\} + o(\varepsilon^{s+1})$$

и оценки близости

$$\max_{x \in D} |u(x) - U_s^\pm(x)| \leq c\varepsilon^s, \quad \max_{x \in D} \left| u(x) - \frac{1}{2}(U_s^+(x) + U_s^-(x)) \right| \leq c\varepsilon^{s+1}.$$

**Доказательство.** С помощью представления (30) доказывается теорема 6.

#### Список литературы

1. Коновалов А.Н. Об одном варианте метода фиктивных областей // Некоторые проблемы вычислительной и прикладной математики. — Новосибирск, 1975. — С. 191–199.
2. Букенов М.М. Малые параметры в алгоритмах задач теории упругости: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1982.
3. Смагулов Ш., Орунханов М.К. Приближенный метод решения уравнений гидродинамики в многосвязных областях // Докл. АН СССР. — 1981. — Т. 260. — № 5. — С. 1078–1082.
4. Вабищевич Г.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. — М.: Изд. МГУ, 1991.