ӘОЖ 539.3

К.Т.Мұханмедина

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті
(E-mail: kama_2007@mail.ru)

Пластинаның жақтары топсалы болғанда иілуін есептеу

Айнымалыларды бөлу әдісімен топсалы бекітілген пластина есебінің аналитикалық түрдегі шешімі алынған. Төрт бұрышты пластинаның иілуін есептеуге арналған. Ақырлы элементтер әдісімен алынған нәтижелер мен берілген әдіс шешімдері арасында жақсы байланыс орналасқан.

Кілт сөздер: пластина, иілу, бұралу, жайылған жүктеме, топса, ішкі күштер, майысу функциясы, момент.

Қазіргі заманғы күрделі ғимараттарда көбінесе негізгі көтеруші қабілеті бар белдік элемент ретінде пластиналарды қолданылады. Пластиналар құрылыс, техниканың әр түрлі салаларында жиі қолданылатындықтан, оларды алдын ала есептеу өте маңызды проблема болып табылады. Олардың беріктігін, қатаңдығын, иілу қабілетін алдын ала есептеу керек. Қарастырылған пластинаның иілуі есебін айнымалыларды бөлу әдісі бойынша шығарамыз.

Координаттық жүйеде төрт бұрышты пластинаны ($-\frac{a_1}{2} \le x_1 \le \frac{a_1}{2}, -\frac{a_2}{2} \le x_2 \le \frac{a_2}{2}$; a_1, a_2 — пластинаның қабырғалары) қарастырайық. Бұл пластинаға әсер ететін сыртқы көлденең күштің қарқындылығы $q(x_1,x_2)$ болып табылады. Осы пластинаның жақтары әр түрлі жағдайда бекінген деп санаймыз.

Төрт бұрышты пластинаның иілуін анықтау үшін мына әдісті [1] қолданамыз:

1. Майысу функциясын $W(x_1,x_2)$ қабылдап аламыз:

$$W(x_1,x_2) = W_0 \cdot f(x,y);\quad f(x,y) = X(x)\cdot Y(y); \tag{1}$$
$$x = x_1/a_1;\ y = x_2/a_2,$$

мұнда W_0 — максимал (үлкен) тік жылжу; $f(x,y)$ — өлшемсіз майысу функциясы; $X(x)$, $Y(y)$ — шекаралық шарттарды қанағаттандыратын белгілі функциялар; x, y — өлшемсіз координаталар.

2. Пластинаның көлденең қимасының бұрылу бұрыштарын анықтаймыз

$$\theta_1 = -\frac{\partial W}{\partial x_1} = -\theta_1^0 \cdot t_1(x,y);\qquad \theta_1^0 = \frac{W_0}{a_1};\qquad t_1(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}; \tag{2}$$
$$\theta_2 = -\frac{\partial W}{\partial x_2} = -\theta_2^0 \cdot t_2(x,y);\qquad \theta_2^0 = \frac{W_0}{a_2};\qquad t_2(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

3. Қисықтықтар $(\xi_1,\ \xi_2)$ мен бұралуды (ξ_{12}) табамыз

$$\xi_1 = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = \xi_1^0 \cdot K_1(x,y);\qquad \xi_1^0 = \frac{W_0}{a_1^2};\qquad K_1(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \tag{3}$$
$$\xi_2 = \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} = \xi_2^0 \cdot K_2(x,y);\qquad \xi_2^0 = \frac{W_0}{a_2^2};\qquad K_2(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$
$$\xi_{12} = \frac{\partial^2 W}{\partial x_1 \partial x_2} = \xi_{12}^0 \cdot K_{12}(x,y);\qquad \xi_{12}^0 = \frac{W_0}{a_1 \cdot a_2};\qquad K_{12}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y};$$
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = \xi^0 \cdot K(x,y);\ \ \xi^0 = \frac{W_0}{a_1 \cdot a_2};\ \ K(x,y) = \frac{a_2}{a_1} K_1(x,y) + \frac{a_1}{a_2} K_2(x,y).$$

4. Иілу $(M_1,\ M_2)$, бұралу (M_{12}) моменттерін және көлденең $(Q_1,\ Q_2)$ күштерін анықтаймыз

$$M_1 = -D(\xi_1 + \nu\xi_2) = -M_1^0 \cdot m_1(x,y); \tag{4}$$

$$M_1^0 = \frac{D \cdot W_0}{a_1^2}; \qquad m_1(x,y) = K_1(x,y) + \frac{a_1^2}{a_2^2} \cdot \nu \cdot K_2(x,y);$$

$$M_2 = -D(\xi_2 + \nu \xi_{12}) = -M_2^0 \cdot m_2(x,y);$$

$$M_2^0 = \frac{D \cdot W_0}{a_2^2}; \qquad m_2(x,y) = K_2(x,y) + \frac{a_2^2}{a_1^2} \cdot \nu \cdot K_1(x,y);$$

$$M_{12} = -D(1-\nu)\xi_{12} = -M_{12}^0 \cdot K_{12}(x,y); \qquad M_{12}^0 = \frac{D \cdot W_0}{a_1 \cdot a_2}(1-\nu);$$

$$Q_1 = -D \frac{\partial}{\partial x_1} \xi(x,y) = -Q_1^0 \cdot q_1(x,y);$$

$$Q_1^0 = \frac{D \cdot W_0}{a_1^2 \cdot a_2}; \qquad q_1(x,y) = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2};$$

$$Q_2 = -D \frac{\partial}{\partial x_2} \xi(x,y) = -Q_2^0 \cdot q_2(x,y);$$

$$Q_2^0 = \frac{D \cdot W_0}{a_1 \cdot a_2^2}; \qquad q_2(x,y) = \frac{a_2}{a_1} \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} + \frac{a_1}{a_2} \frac{\partial^3 f}{\partial y^3},$$

мұнда ν — Пуассон коэффициенті; D — пластинаның цилиндрлік қатаңдығы.

5. Бұралу моментін көлденең күш арқылы өрнектейміз

$$M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{K_0} \frac{\partial Q_1}{\partial x_2} = \breve{M}_{12}^0 \cdot \frac{\partial q_1}{\partial y}; \qquad \breve{M}_{12}^0 = \frac{Q_1^0 (1-\nu)}{K_0 \cdot a_2};$$

$$M_{12} = -\frac{(1-\nu)}{K_0} \frac{\partial Q_2}{\partial x_1} = \widehat{M}_{12}^0 \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x}; \qquad \widehat{M}_{12}^0 = \frac{Q_2^0 (1-\nu)}{K_0 \cdot a_1};$$

$$K_0 = -\frac{1}{a_1 a_2} \cdot \frac{\int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} K(x,y) \cdot f(x,y)\, dx dy}{\int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} f^2(x,y)\, dx dy}, \tag{5}$$

мұнда K_0 — деформация күйінің параметрі.

6. Ішкі көлденең күштің қарқындылығы арқылы сыртқы көлденең күштің қарқындылығын табамыз

$$q(x_1, x_2) = D \cdot \nabla^2 \nabla^2 W = P_0 \cdot S(x,y); \qquad P_0 = \frac{D \cdot W_0}{a_1^2 a_2^2};$$

$$S(x,y) = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}, \tag{6}$$

мұнда $S(x,y)$ — ішкі көлденең күштің қарқындылығының таралу заңдылығы.

7. Ішкі көлденең күштің қарқындылығының үлкен мәнін анықтаймыз

$$P_0 = \frac{\omega}{\left[\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \omega_1^1 \cdot \omega_1^2 + 2\omega_{12}^1 \cdot \omega_{12}^2 + \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \omega_2^1 \cdot \omega_2^2\right]}; \tag{7}$$

$$\omega = \int\limits_{-1/2}^{1/2} \int\limits_{-1/2}^{1/2} q(x,y) \cdot X(x) \cdot Y(y)\, dx dy;$$

$$\omega_1^1 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} X^{IV}(x) \cdot X(x)\, dx; \qquad \omega_1^2 = \int\limits_{-1/2}^{1/2} Y^2(y)\, dy;$$

$$\omega_2^2 = \int_{-1/2}^{1/2} Y^{IV}(y)\cdot Y(y)\,dy; \qquad \omega_2^1 = \int_{-1/2}^{1/2} X^2(x)\,dx;$$

$$\omega_{12}^1 = \int_{-1/2}^{1/2} X''(x)\cdot X(x)\,dx; \qquad \omega_{12}^2 = \int_{-1/2}^{1/2} Y''(y)\cdot Y(y)\,dy.$$

Көрсетілген әдісті қолданып, жақтары топса арқылы бекітілген пластинаны есептеп көрелік. Бұл пластинаға қарқындылығы тұрақты $q(x_1,x_2)=q_0=const$ жайылған күш әсер етсін деп қарастырамыз.

Пластинаның жақтары топса арқылы бекітілген болғандықтан, мынандай шекаралық шарттар орындалмақ:

$$x_1=\pm\frac{a_1}{2}; \qquad W\left(\pm\frac{a_1}{2},x_2\right)=0; \qquad M_1\left(\pm\frac{a_1}{2},x_2\right)=0; \tag{8}$$

$$x_2=\pm\frac{a_2}{2}; \qquad W\left(x_1,\pm\frac{a_2}{2}\right)=0; \qquad M_2\left(x_1,\pm\frac{a_2}{2}\right)=0.$$

Осы шарттарды (1), (3) және (4) өрнектерді қолдана отырып, ашып жазамыз:

$$W\left(\pm\frac{a_1}{2},x_2\right)=W_0X\left(\pm\frac{1}{2}\right)\cdot Y(y)=0;$$

$$W_0\neq 0,\quad Y(y)\neq 0,\ \text{яғни}\ X\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0;$$

$$M_1\left(\pm\frac{a_1}{2},x_2\right)=-M_1^0m_1\left(\pm\frac{1}{2},y\right)=-M_1^0\left[K_1\left(\pm\frac{1}{2},y\right)+\frac{a_1^2}{a_2^2}\nu K_2\left(\pm\frac{1}{2},y\right)\right]=$$

$$=-M_1^0\left[X''\left(\pm\frac{1}{2}\right)\cdot Y(y)+\frac{a_1^2}{a_2^2}\nu X\left(\pm\frac{1}{2}\right)\cdot Y''(y)\right]=0; \tag{9}$$

$$M_1^0\neq 0,\quad Y(y)\neq 0,\quad Y''(y)=0,\ \text{яғни}\ X''\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0.$$

Осылайша, (8) өрнектің екінші шарттарын былайша жазамыз:

$$Y\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0,\ Y''\left(\pm\frac{1}{2}\right)=0. \tag{10}$$

Осы шарттарды қанағаттандыратын функциялардың және олардың туындыларының өрнектері келесі түрде болады:

$$X(x)=1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4; \quad Y(y)=1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4;$$

$$X'(x)=-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^3; \quad Y'(y)=-\frac{48}{5}y+\frac{64}{5}y^3;$$

$$X''(x)=-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}x^2; \quad Y''(y)=-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}y^2; \tag{11}$$

$$X'''(x)=\frac{384}{5}x; \quad Y'''(y)=\frac{384}{5}y;$$

$$X^{IV}(x)=\frac{384}{5}; \quad Y^{IV}(y)=\frac{384}{5}.$$

Табылған функцияларды (11) қолдана отырып, пластинаның өлшемсіз майысу функциясын (1) табамыз

$$f(x,y)=\left(1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right). \tag{12}$$

Бұл функция координаттық жүйенің басында $f(0,0)=1$ тең болады да, пластинаның жақтарындағы шекаралық шарттарды толық қанағаттандырады. Енді (7) өрнек бойынша табылған функцияларды (11) ескере отырып, ішкі күштердің қарқындылығын анықтаймыз

$$\omega=\left(\frac{16}{25}\right)^2\cdot q_0;\quad \omega_1^1=\frac{64\cdot 6}{5}\cdot\frac{16}{25};\quad \omega_{12}^1=-\frac{48}{5}\cdot\frac{272}{5\cdot 105};$$

$$\omega_2^1=\frac{3968}{125\cdot 63}=\omega_1^2;\quad \omega_2^2=\omega_1^1;\ \omega_{12}^2=\omega_{12}^1;\quad P_0=\alpha_0\cdot q_0;\tag{13}$$

$$\alpha_0=\frac{25\cdot 21}{16\cdot 64\cdot 31}\cdot\frac{1}{\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2+\frac{51\cdot 17}{14\cdot 31}+\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2}.$$

Пластинаның $x=0,\ y=0$ нүктесіндегі үлкен тік жылжуы (6) формула бойынша тең болмақ

$$W_0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1^2\cdot a_2^2}{D}.\tag{14}$$

Әрі қарай (14) және (12) нәтижелерді қолдана отырып, қарастырылып отырған пластинаның шешімін анықтаймыз:

– майысу функциясын (1)

$$W(x_1,x_2)=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1^2\cdot a_2^2}{D}\left(1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4\right)\cdot\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right);\tag{15}$$

– бұрылу бұрыштарын (2)

$$t_1(x,y)=\left(-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^3\right)\cdot\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right);$$

$$t_2(x,y)=\left(1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4\right)\cdot\left(-\frac{48}{5}y+\frac{64}{5}y^3\right);\tag{16}$$

$$\theta_1^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1\cdot a_2^2}{D};\quad \theta_2^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1^2\cdot a_2}{D};$$

– қисықтықтар мен бұралуды (3)

$$\xi_1^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_2^2}{D},\quad \xi_2^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1^2}{D},\quad \xi_{12}^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1\cdot a_2}{D};$$

$$K_1(x,y)=\left(-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}x^2\right)\cdot\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right);$$

$$K_2(x,y)=\left(1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4\right)\cdot\left(-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}y^2\right);\tag{17}$$

$$K_{12}(x,y)=\left(-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^3\right)\cdot\left(-\frac{48}{5}y+\frac{64}{5}y^3\right);$$

$$K(x,y)=\frac{a_2}{a_1}K_1(x,y)+\frac{a_1}{a_2}K_2(x,y);\quad \xi^0=\alpha_0\cdot q_0\frac{a_1\cdot a_2}{D};$$

– ішкі күштерді (4)

$$M_1^0=\alpha_0\cdot q_0a_2^2;\quad M_2^0=\alpha_0\cdot q_0a_1^2;\quad M_{12}^0=(1-\nu)\alpha_0\cdot q_0a_1a_2;$$

$$Q_1^0=\alpha_0\cdot q_0a_2;\quad Q_2^0=\alpha_0\cdot q_0a_1;$$

$$m_1(x,y)=K_1(x,y)+\frac{a_1^2}{a_2^2}\cdot\nu\cdot K_2(x,y);$$

$$m_2(x,y)=K_2(x,y)+\frac{a_2^2}{a_1^2}\cdot\nu\cdot K_1(x,y);\tag{18}$$

$$q_1(x,y)=\frac{a_2}{a_1}\frac{384}{5}x\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right)+\frac{a_1}{a_2}\left(-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^3\right)\left(-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}y^2\right);$$

$$q_2(x,y)=\frac{a_2}{a_1}\left(-\frac{48}{5}y+\frac{64}{5}y^3\right)\left(-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}x^2\right)+\frac{a_1}{a_2}\frac{384}{5}y\left(1-\frac{24}{5}x^2+\frac{16}{5}x^4\right);$$

– бұралу моментін (5)

$$\breve{M}_{12}^{0}=\widehat{M}_{12}^{0}=\frac{M_{12}^{0}}{\bar{K}_{0}};\qquad \bar{K}_{0}=-\left[\frac{a_{2}}{a_{1}}\frac{\omega_{12}^{1}}{\omega_{2}^{1}}+\frac{a_{1}}{a_{2}}\frac{\omega_{12}^{2}}{\omega_{1}^{2}}\right]; \tag{19}$$

$$\bar{K}_{12}(x,y)=\frac{\partial q_{1}}{\partial y}=\frac{\partial q_{2}}{\partial x}=\frac{384}{5}\left[\frac{a_{2}}{a_{1}}x\left(-\frac{48}{5}y+\frac{64}{5}y^{3}\right)+\frac{a_{1}}{a_{2}}y\left(-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^{3}\right)\right].$$

Осылайша, жақтары топса арқылы бекітілген төрт бұрышты пластинаның деформациялық және кернеулік күйлерін анықтайтын функциялар (15)–(19) болып табылады.

Алынған шешімнің дұрыстығын дәлелдеу үшін кейбір параметрлердің сандық мәндерін анықтаймыз. Ол үшін берілген пластина квадрат түрінде $(a_1=a_2=a)$ берілді деп санап, (13)–(19) өрнектер бойынша параметрлердің мәндерін анықтаймыз:

1) (13)-ші өрнектен

$$\alpha_0=0,004137(0,004129),\ \text{алшақтығы}\ 0,19\ \%;$$

2) (18)-ші өрнектен $(\nu=0,3)$

$$m_1(0,0)=m_2(0,0)=-\frac{48}{5}(1+\nu);\qquad M_1^0=M_2^0=\alpha_0 q_0 a^2;$$

$$M_1=M_2=0,051629(0,048918)q_0a^2,\ \text{алшақтығы}\ 5,26\ \%;$$

3) (18)-ші өрнектен

$$q_1\left(\frac{1}{2},0\right)=\frac{1728}{25},\qquad Q_1^0=\alpha_0 q_0 a;$$

$$Q_1=-0,28595(-0,2823)q_0a,\ \text{алшақтығы}\ 1,28\ \%;$$

4) (17)-ші өрнектен

$$K_{12}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{16\cdot 16}{25};\ M_{12}^{0}=(1-\nu)\alpha_0 q_0 a^2;$$

$$R_0=2M_{12}=-0,059308(-0,056458)q_0a^2,\ \text{алшақтығы}\ 4,8\ \%;$$

5) (17)-ші өрнектен

$$K(0,0)=-\frac{96}{5};\qquad \xi^0=\alpha_0\frac{q_0a^2}{D},$$

$$\xi(0,0)=-0,0794(-0,0753)\frac{q_0a^2}{D},\ \text{алшақтығы}\ 5,16\ \%;$$

6) (19)-шы өрнектен

$$\bar{K}_0=19,741935,\qquad \frac{\partial q_1}{\partial y}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\bar{K}_{12}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=-245,76;$$

$$M_{12}=-0,03605(-0,03299)q_0a^2,\ \text{алшақтығы}\ 8,49\ \%.$$

Тепе-теңдігін анықтау үшін көлденең күштің теңгеруші күштерін анықтаймыз

$$R_1=2a_2\int_0^{1/2}Q_1dy=Q_1^0a_2\left[\frac{a_2}{a_1}\frac{384}{5}x\cdot J_1+\frac{a_1}{a_2}\left(-\frac{48}{5}x+\frac{64}{5}x^3\right)\cdot J_2\right];$$

$$J_1=2\int_0^{1/2}\left(1-\frac{24}{5}y^2+\frac{16}{5}y^4\right)dy=\frac{16}{25};$$

$$J_2=2\int_0^{1/2}\left(-\frac{48}{5}+\frac{192}{5}y^2\right)dy=-\frac{32}{5}.$$

Осы өрнектен мына нәтижелер шығады:

$$R_1\big|_{x=-\frac{1}{2}}=-45,056\cdot Q_1^0;\qquad R_1\big|_{x=\frac{1}{2}}=45,056\cdot Q_1^0;$$

$$R_2\big|_{y=-\frac{1}{2}}=-45,056\cdot Q_2^0;\qquad R_2\big|_{y=\frac{1}{2}}=45,056\cdot Q_2^0,$$

егер $x \to y, \quad y \to x,$ онда $R_1 \to R_2$.

Осы күштердің қосындыларын табамыз

$$\widehat{R}_0 = R_1\big|_{x=-\frac{1}{2}} - R_1\big|_{x=\frac{1}{2}} + R_2\big|_{y=-\frac{1}{2}} - R_2\big|_{y=\frac{1}{2}} = 0,7456 q_0 a^2.$$

Пластиналардың бұрыштарындағы бұралу моментінен пайда болған күштерді анықтаймыз

$$\breve{R} = 4 \cdot R_0 = 4 \cdot 0,059308 \cdot q_0 a^2 = 0,237232 \cdot q_0 a^2.$$

Пластина жақтарының реакцияларының тенгеруші күші

$$R = \widehat{R}_0 + \breve{R} = 0,9828(\ 1\ ) q_0 a^2, \text{ алшақтығы } 1,7\,\%.$$

Осы алынған нәтиже пластинаның тепе-теңдікте болатындығын көрсетеді. Олар элементтер әдісімен [2] табылған нәтижелермен (олар жақша ішінде көрсетілген) салыстырылған. Олардың алшақтығы көп болмағандықтан, аналитикалық және ақырлы элементтер әдістерінің дұрыстығын көрсетеді.

Тағы бір тұжырым жасау үшін K_{12} және $\overline{K}_{12}$ функциялардың мәндерін анықтап көрелік

$$K_{12}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{16\cdot 16}{25}, \qquad K_{12}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = -\frac{16\cdot 16}{25};$$

$$K_{12}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = -\frac{16\cdot 16}{25}, \qquad K_{12}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{16\cdot 16}{25};$$

$$\overline{K}_{12}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[-\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} - \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right], \quad \overline{K}_{12}\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} + \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right];$$

$$\overline{K}_{12}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} + \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right], \quad \overline{K}_{12}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[-\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} - \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right];$$

$$\overline{K}_{12}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} + \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right], \quad \overline{K}_{12}\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) = \frac{384}{5}\left[-\frac{8}{5}\frac{a_2}{a_1} - \frac{8}{5}\frac{a_1}{a_2}\right].$$

Бұл мәндер екі функциялардың өзгеру заңдылығы біркелкі екенін көрсетеді, сондықтан бұралу моментін (4) немесе өрнектер (5) арқылы анықтауға болатынын дәлелдейді.

Айнымалыларды бөлу әдісін [1] қолдану арқылы төртбұрышты пластинаның иілу есебінің аналитикалық түрде шешімі алынды. Бұл шешімнің әдебиеттерде келтірілген шешімнен айырмашылығы жай полиномдылығы және оны арқалықтың иілу функциялары арқылы өрнектелуі болып табылады.

Әдебиеттер тізімі

1 *Алдабергенов А.Қ.* Материалдар кедергісі мен серпімділік және пластикалық деформация теориялар негіздері. — Алматы: Рауан, 1994. — 502 б.

2 *Турсунов К.А.* Основы расчета прямоугольных пластин. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2001. — 70 с.

К.Т.Муханмедина

Расчет шарнирно-опертой пластины на изгиб

Методом разделения переменных получено решение задачи шарнирно-опертой пластины в аналитической форме. Статья посвящена расчету прямоугольной пластины на изгиб. Установлена хорошая согласованность результатов по методу конечных элементов с решением по данному методу.

K.T.Mukhanmedina

Calculation joint support plate on bend

This article devoted to calculation plate on a band with help of the method of division of variables. The decision of a task based on rolls plates in the analytical form is received. The good coordination of results on a method of final elements with the decision on the given method is established.

References

1 Aldabergenov A.K. *Foundations of the theory of plastic deformation and the resistance and elasticity of materials*, Almaty: Rauan, 1994, 502 p.

2 Tursunov K.A. *Bases for design of rectangular plates*, Karaganda: Publ. KSU, 2001, 70 p.

ӘОЖ 517.9

Қ.Н.Оспанов, А.Зұлхажав

Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана
(E-mail: ospanov_kn@enu.kz)

Екінші ретті айырымдық бір теңдеулер жүйесі шешімдерінің қасиеттері жайлы

Мақалада екінші ретті нұқсанды айырымдық теңдеулердің шексіз жүйесінің коэрцитивті шешілу шарттары алынған. Бұл шарт жүйені туындатушы оператор резольвентасының шағын және шектеулі типті болатынын қамтамасыз ететіні көрсетілген.

Кілт сөздер: айырымдық жүйе, оператордың бөліктенуі, шағын, сингулярлық мән.

1 Кіріспе және есептің қойылуы

Практикада дифференциалдық теңдеулермен қатар, айырымдық теңдеулер жүйелері де кеңінен қолданылады. Шексіз аралықта берілген (сингулярлы) сызықты дифференциалдық теңдеулердің аналогы болып табылатын айырымдық жүйелер шексіз көп сызықты алгебралық теңдеулерден тұрады. Осындағы теңдеулер санының шексіз көптігі және коэффициенттердің шенелмеген тізбек құруы оларды зерттеуді күрделендіреді. Оның үстіне сингулярлы дифференциалдық теңдеулермен салыстырғанда шексіз айырымдық жүйелер теориясы баяу дамуда. Мысалы, шексіз айырымдық теңдеулер жүйелері үшін бөліктену теориясы мүлде дамымаған десе болады. Негізгі қиындықтар дифференциалдық есептеу мен айырымдық есептеу тәсілдері арасындағы алшақтықтан туындайды.

Соңғы кезде шексіз айырымдық жүйелерді зерттеуде функционалдық талдау әдістері тиімді қолданылып жүр. М. Өтелбаев пен Б. Мүсілімов жұмысында өзіне-өзі түйіндес Штурм-Лиувилль айырымдық операторының алғашқы өзіндік мәнінің екі жақты бағасы алынды [1]. Осы оператордың l_1 тізбектер кеңістігінде қайтарымдылығы мен оның квазисызықты бір жалпылауынан туындайтын теңдеудің шешілу шарттары [2] көрсетілді. Салмақты Соболев кеңістіктерінің аналогы болып табылатын айырымдық салмақты тізбектер кеңістіктері үшін енгізу теоремалары Е. Смайылов, Г. Мұхамедиев, А.Т. Бұлабаев, Л.М. Мұстафина, А.Т. Мұхамбетжанов жұмыстарында зерттелді [3–5]. Бұл нәтижелер айырымдық Штурм-Лиувилль теңдеуін зерттеу үшін пайдаланылған.

Алайда жалпы түрдегі екінші ретті айырымдық теңдеулер Штурм-Лиувилль айырымдық теңдеуіне келтіріле бермейді. Осы себепті жалпы түрдегі екінші ретті айырымдық теңдеулер жүйелерін жеке зерттеу қажеттілігі туындайды. Мақалада біз сингулярлы екінші ретті дифференциалдық теңдеудің айырымдық аналогының бірі болып табылатын