УДК 510.67

А.Р.Ешкеев, А.Р.Сабитова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: modth1705@mail.ru)

Атомные модели центра Δ-*M*-теорий в обогащенной сигнатуре

В статье рассмотрены некоторые виды атомных моделей Δ-M теорий в обогащённой сигнатуре. Для этих теорий приведен критерий $(n+1)$-Δ-позитивной экзистенциально замкнутой атомности с помощью существования специальных видов атомных моделей. Основным методом исследования данной работы является семантический метод для йонсоновских теорий. Его сущность заключается в переносе теоретико-модельных свойств центра на саму теорию.

Ключевые слова: обогащенная сигнатура, позитивный, атомарные формулы, экзистенционально замкнутый, аксиоматизируема, атомные формулы, йонсоновские теории.

В хорошо известной книге [1] крупный специалист в области теории моделей Дж. Кейслер условно разделил теорию моделей на две части: «западная» и «восточная». При этом он подчёркивает, что тематика западной теории моделей связана с задачами, возникавшими в проблемах математического анализа и теории чисел и, как правило, здесь используются произвольные формулы первого порядка.

С другой стороны, тематика восточной теории моделей связана с проблемами, возникавшими в задачах классической алгебры, и в этом случае используются формулы первого порядка, пренексный вид которых имеет длину не больше двух. Условность «географических» названий связана с местом проживания основоположников теории моделей. Тарский жил на западном побережье, а Робинсон — на восточном побережье США.

Результаты данной работы по своему содержанию относятся к восточной теории моделей. Статья представляет результаты авторов относительно тематики позитивной йонсоновской теории в обогащённой сигнатуре. Работа посвящена изучению счетных малых моделей и понятию экзистенциальной замкнутости, вообще говоря, неполных теорий в обогащённой сигнатуре. Под малыми моделями понимаются позитивные обобщения простых и атомных моделей. В [2] Воот доказал критерий простоты модели произвольной счетной теории. Оказалось, что модель проста тогда и только тогда, когда она счетна и атомна. Напомним, что модель теории называется простой, если она элементарно вкладывается в любую модель рассматриваемой теории.

В [3] исследуются связи между алгебраической простотой и различными видами атомности. Модель теории называется алгебраически простой, если она изоморфно вкладывается в любую модель данной теории. Под вложением понимается инъективное отображение. Как мы видим из определений, простая модель сохраняет все формулы языка в своем образе, а алгебраически простая — только лишь булевые комбинации атомарных формул. В [3] также было обобщено понятие атомности модели. Вместо классического определения атомности (модель атомна, если любой ее кортеж реализует главный тип) было рассмотрено понятие атомности в классическом случае, но только для определенного вида формул, и эти виды, как правило, либо экзистенциональные формулы, либо универсальные, либо их пересечение.

Как показывают основные результаты этой статьи [3], результат, подобный теореме Воота об описании малых атомных моделей на языке алгебраической простоты, получить не удалось. Примеры, которые были приведены в работе [3], как правило, отражают примеры индуктивных теорий, относящихся по своей специфике к указанной выше восточной теории моделей.

В силу своего определения одним из достаточно интересных подклассов таких теорий является класс йонсоновских теорий. К ним, в частности, относятся такие классические объекты алгебры, как теории групп, теории абелевых групп, различные виды колец (том числе поля фиксированной характеристики), решетки, полигоны. При изучении йонсоновских теорий Т.Г.Мустафиным в работе [4] был доказан результат 5.7, который достигает тех целей, которые поставили перед собой авторы в [3], но при этом на рассматриваемую теорию накладываются дополнительные условия, что не говорит об общности ситуации.

В рамках изучения йонсоновских теорий первым автором был определен и рассмотрен новый класс Δ - PJ -теорий (см. [5]). Причем при некоторых фиксированных Δ мы получаем йонсоновские теории, устойчивые относительно гомоморфизмов. Данная проблематика достаточно свежа. В относительно недавно опубликованной серии работ Бен-Якова [6, 7] изучаются некоторые понятия позитивной логики первого порядка и на их основе доказывается сводимость к ним соответствующих понятий логики первого порядка. К примеру, рассмотрена позитивная морлизация теории, которая позволяет не делать разницу между позитивно определимыми и позитивно бесконечно определимыми множествами. Синтаксической особенностью этих работ является элиминирование символа отрицания и квантора всеобщности в базисных формулах. Семантической же особенностью является замена понятий вложений и элементарных вложений на так называемые продолжения и погружения. В работе [5] рассмотрены позитивные аналоги йонсоновских теорий, но при этом их аксиомы несколько отличаются от базисных формул, например, из [6]. Таким образом, мы будем следовать идеологии изучения специфики йонсоновских теорий и при этом использовать аналоги теорем из [6, 7].

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^{+}(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^{+}(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^{+}(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^{+}(At)) = L^{+}$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^{+})$ — это произвольная булева комбинация формул из L^{+}.

В работе [8] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [4]. Далее рассмотрим связь малых и экзистенциально замкнутых моделей в новом классе теорий. Напомним определение этого класса.

Определение. Теория T называется Δ -позитивно мустафинской (Δ - PM)-теорией, если

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π^{+}_{n+2} -аксиоматизируемой;

3) теория T допускает $\Delta - JEP$;

4) теория T допускает $\Delta - AP$.

В [8–10] были рассмотрены различные теоретико-модельные свойства Δ - PM -теорий.

В данной работе рассматриваются некоторые теоретико-модельные свойства подкласса Δ - PM -теорий, а именно Δ-мустафинские (Δ-M-) теории счетного языка первого порядка. Это теории, которые получаются из Δ -позитивно мустафинских заменой в определении теорий Δ-продолжений на Δ-погружения.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π^{+}_{n} — множество всех формул языка L^{+} вида $\forall\exists...\varphi$ (т.е. формулы из L^{+} с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Sigma^{+}_{n+1} \subseteq L^{+}$. Пусть T — Δ -M-теория. Совместная с T Σ^{+}_{n+1}-формула $\varphi(\overline{x})$ языка L^{+} называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -полной, если для любой Σ^{+}_{n+1}-формулы $\psi(\overline{x})$ либо $T \vdash \varphi(\overline{x}) \to \psi(\overline{x})$, либо $T \vdash \varphi(\overline{x}) \to \neg\psi(\overline{x})$. Совместная с T Σ^{+}_{n+1}-формула $\varphi(\overline{x})$ языка L^{+} называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -пополняемой, если существует такая $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -полная формула $\theta(\overline{x})$, что $T \vdash \theta(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x})$. Теория T называется $(n+1)$ - Δ -позитивно экзистенциальной атомной, если каждая Σ^{+}_{n+1}-формула $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -пополняема. Модель A теории T называется $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -атомной, если каждая последовательность $\overline{a} \in A$ удовлетворяет некоторой $(\Sigma^{+}_{n+1}, \Sigma^{+}_{n+1})$ -полной формуле. Модель A теории T называется $(n+1)$ - Δ -позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ -гомоморфизма $h: A \xrightarrow[\Delta]{} B$ и любых $\overline{a} \in A$ и $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$ $B \models \exists\overline{y}\varphi(h(\overline{a}), \overline{y}) \Rightarrow A \models \exists\overline{y}\varphi(\overline{a}, \overline{y})$. Обозначим через $E^{+}_{n+1}(T)$ множество всех $(n+1)$ - Δ -позитивно экзистенциально замкнутых моделей теории T. Появление символа $(n+1)$ важно, так как теория может быть $(n+1)$ -аксиоматизируема, а Δ быть тривиальным, например, $\Delta = B^{+}(At)$.

В работе рассматриваются некоторые виды атомных моделей Δ-*M*-теорий в обогащённой сигнатуре. Приводится критерий $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомности этих теорий.

Напомним содержание теорем из указанных выше работ, которые связаны с контекстом основных результатов данной работы.

Теорема 3.2 [3]. Пусть T — $\forall\exists$-теория, полная для экзистенциальных предложений, пусть *A* — счетная модель *T*.

a) Тогда (*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) $\Rightarrow$ (*iii*) и (*ii*) $\Rightarrow$ (*ii*)*, где

(*i*) *A* —$\left(\Sigma, \Sigma\right)$-атомная;

(*ii*) *A* — Σ^*-nice;

(*ii*)* *A* — экзистенциально замкнутая и Σ-nice;

(*iii*) *A* — слабо$\left(\Sigma,\Pi\right)$-атомная.

b) Если T полна для $\forall\exists$-предложений, тогда условия (*i*), (*ii*), (*ii*)* и (*iii*) эквивалентны.

Теорема 5.3 [4]. Каждая $\left(\Sigma_{\alpha+1},\Sigma_{\alpha+1}\right)$-атомная модель T является $\Sigma_{\alpha+1}$-замкнутой.

Теорема 5.5 [4]. Пусть T обладает α-*JEP*. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) теория T является $\left(\Sigma_{\alpha+1},\Sigma_{\alpha+1}\right)$-атомной;

2) теория T имеет счетную $\left(\Sigma_{\alpha+1},\Sigma_{\alpha+1}\right)$-атомную модель.

Следующий результат из [11] является обобщением результатов 5.3 из [4] и 3.2 из [3] для Δ-*M*-теорий.

Теорема 1 [11]. Пусть T — Δ-*M*-теория. Тогда каждая $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-атомная модель теории T принадлежит $E^+_{n+1}(T)$.

Следующий результат из [11] является обобщением результата 5.5 из [4].

Теорема 2 [11]. Пусть T — Δ-*M*-теория. Тогда эквивалентны следующие условия: 1) теория T является $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциальной атомной; 2) теория T имеет счетную $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-атомную модель.

В последнее время в теории моделей часто встречаются работы, связанные с обогащением сигнатуры. В каждом случае это свои специфические интересы. Например, обогащение константами или предикатами. В [9] была рассмотрена йонсоновская интерпретация выделения собственной элементарной подмодели. Соответственно, в такой стуации все указанные выше вопросы имеют место быть и было бы интересно их рассмотреть.

Дадим необходимые определения, связанные с обогащением сигнатуры Δ-*M*-теории. Пусть T есть произвольная Δ-*M*-теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории $T. A\subseteq C$. Let $\sigma_\Gamma(A)=\sigma\cup\left\{c_a\mid a\in A\right\}\cup\Gamma$, где $\Gamma=\left\{P\right\}\cup\left\{c\right\}$. Пусть $T_\Gamma^{PM}\left(A\right)=Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}\left(C,a\right)_{a\in A}\cup\left\{P\left(c_a\right)|a\in A\right\}\cup\left\{P\left(c\right)\right\}\cup\left\{"P\subseteq"\right\}$, где $\left\{"P\subseteq"\right\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P есть экзистенциально-замкнутая подмодель в языке сигнатуры σ.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории $\Delta-PM$ в новой сигнатуре $\Delta-PM$, где T. Следующий факт позволяет работать с позитивными обобщениями йонсоновских теорий в обогащённой сигнатуре. Заметим (*) (взято из [9]), что если теория $\Delta-PM$ Δ-*M*-йонсоновская, то в обогащенном языке относительно условий теоремы, центр T^* будет таким же, т.е. Δ-*M*-теорией. Это достигается следующим образом: константы будут переходить в образы констант, реализация предиката — в образ реализации. Необходимые образы получаются за счет соответствующих отображений, которые нам обеспечивают условия σ_Γ и $\Gamma=\left\{c\right\}$ из Δ-*M*-йонсоновости изначальной теории T^*. Далее, в силу того, что по условию T^c совершена, как α-йонсоновская теория, то T^c является Δ-*M*-теорией. Тогда существует ее центр и он является одним из пополнений теории T^c в обогащенном языке.

Следующий результат является обобщением результатов 5.3 из [1], 3.2 из [2] и 1 из [11].

Теорема 1. Пусть T — совершенная, α-йонсоновская Δ-*M*-теория, полная относительно Π^+_{n+2}. Тогда каждая $(\Sigma^+_{n+1},\Sigma^+_{n+1})$-атомная модель теории T^* принадлежит $E^+_{n+1}(T^*)$, где T^* — центр теории T в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$.

Доказательство. В силу указанной выше (*) нам достаточно заметить, что класс позитивно экзистенциально замкнутых моделей в условиях нашей теоремы как для самой теории, так и для её центра в обогащённой сигнатуре совпадает, а значит мы можем повторить рассуждения из [11]. По определению позитивно экзистенциальной замкнутости нужно показать, что если A, B — такие две модели теории T, что для каждого Δ-гомоморфизма $h: A \xrightarrow[\Delta]{} B$ и любых $\overline{a} \in A$ и $\varphi(\overline{x}, \overline{y}) \in \Delta$ $B \models \exists \overline{y} \varphi(h(\overline{a}), \overline{y})$, то верно, что $A \models \exists \overline{y} \varphi(\overline{a}, \overline{y})$. В частности, $A \subseteq_{\Pi_n^+} B$, $\overline{a} \in A$, $\varphi(\overline{x}) \in \Sigma_{n+1}^+$, $B \models \varphi(\overline{a})$. Предположим, что $\theta(\overline{x})$ — такая $(\Sigma_{n+1}^+, \Sigma_{n+1}^+)$-полная формула, что $A \models \theta(\bar{a})$. Тогда $B \models \theta(\bar{a})$. Поэтому $B \models \theta(\overline{a}) \to \varphi(\overline{a})$. Следовательно, неверно $T \vdash \theta(\overline{x}) \to \neg\varphi(\overline{x})$. Тогда $T \vdash \theta(\overline{x}) \to \varphi(\overline{x})$. Значит, $A \models \varphi(\overline{a})$.

Следующий результат является обобщением результатов 5.5 из [1] и 2 из [11].

Теорема 2. Пусть T — совершенная, α-йонсоновская-Δ-*M*-теория, полная относительно Π_{n+2}^+. T^* — центр теории T в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$.

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) теория T^* является $(n+1)$-Δ-позитивно экзистенциально атомной;

2) теория T^* имеет счетную $(\Sigma_{n+1}^+, \Sigma_{n+1}^+)$-атомную модель.

Доказательство. В силу указанной выше (*) нам опять же достаточно заметить, что класс позитивно экзистенциально замкнутых моделей в условиях нашей теоремы как для самой теории, так и для её центра в обогащённой сигнатуре совпадает, и мы можем повторить рассуждения из [10] лишь с той разницей, что надо заботиться о сохранении свойств Δ-*JEP* и Δ-*AP* в обогащённой сигнатуре, а это следует из рассуждений подобно работе [9], а так же, как и в [6], мы используем тот факт, что Δ можно рассмотреть как наименьший позитивный фрагмент, т.е. замкнутое множество бескванторных формул. Далее основное утверждение следует из соответствующей теоремы об опускании позитивных типов и того факта, что Δ-*M*-теория допускает по определению Δ-*JEP*.

Все неопределенные в этой статье определения понятий, а также более полную информацию о йонсоновских теориях и их позитивных обобщениях можно прочитать в [10].

Список литературы

1 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж.Барвайса. — Ч. 1. Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1982. — С. 126.

2 *Vaught R.L.* Denumerable models of complete theories. In: Infinitistic Methods. — London: Pergamon, 1961.

3 *John T. Baldwin, David W.Kueker.* Algebraically prime models // Annals of Mathematical Logic. 20. — 1981. — P. 289–330.

4 *Мустафин Т.Г.* Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно-йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. — 1998. — Т. 1. — № 2. — С. 135–197.

5 *Ешкеев А.Р.* Категоричные позитивные теории, синтаксис и семантика логических систем // Материалы российской школы-семинара, посвящ. 100-летию со дня рождения Курта Геделя, 23–27 августа 2006, Иркутск, Ин-т математики СО РАН, Изд-во гос. пед. ун-та, 2006. — С. 28–32.

6 *Itay Ben-Yaacov.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — Vol. 3. — № 1. — P. 85–118.

7 *Itay Ben-Yaacov.* Compactness and independence in non first order frameworks // Bull. of Symbolic logic. — 2005. — Vol. 11. — № 1. — P. 28–50.

8 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность $\Delta - PM$ -теорий // Тез. 12-й межвуз. конф. по математике, механике и информатике. — Алматы, 2008.

9 *Ешкеев А.Р.* О йонсоновской стабильности и некоторых её обобщениях // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Вып. 8. — МГУ, ЦНИТ. — С. 117–128.

10 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

11 *Ешкеев А.Р., Мейрембаева Н.К.* Свойства $(\Sigma_{n+1}^+, \Sigma_{n+1}^+)$-атомных моделей T-Δ-PM -теории // Вестн. КазНУ. Сер. математика, механика, информатика. — Спец. вып. — 2008. — № 3. — С. 74–77.

А.Р.Ешкеев, А.Р.Сабитова

Қаныққан сигнатурадағы Δ-*M*-теория орталығының атомдық модельдері

Мақалада қаныққан сигнатурадағы Δ-*M*-теориялардың атомдық модельдердің кейбір түрлері қарастырылған. Осы теориялар үшін Δ-позитивті экзистенционалды тұйық атомдылығы $(n+1)$ критерийі арнайы түрлер бар болуы үшін келтірілген. Бұл жұмыстың негізгі зерттеу әдістемесі болып йонсондық теориялар үшін семантикалық әдіс табылады. Оның маңыздылығы орталықтың теориялық-модельдік қасиетін теорияны өзіне алмастыруында жатыр.

A.R.Yeshkeyev, A.R.Sabitova

Atomic models of the center Δ-*M*-theories in the enriched signature

In this article some kinds of the atomic model of Δ-*M*-theories enriched signature are considered. For these theories a criterion $(n+1)$ of Δ-positive existentially closed atomicity by the existence of special types of atomic models is given. The main research method of this paper is a semantic method for Jonsson theories. Its essence lies in the transfer of model-theoretic properties of the center on the theory itself.

References

1 *Handbook of mathematical logic: In 4 p.* / Ed. Dzh.Barvaysa. — Part 1. Model theory / Lane. from English, Moscow: Nauka; Home edition of physical and mathematical literature, 1982, p. 126.

2 Vaught R.L. *Denumerable models of complete theories* // Infinitistic Methods, London: Pergamon, 1961.

3 John T.Baldwin, David W.Kueker. *Algebraically prime models* // Annals of Mathematical Logic 20, 1981, p. 289–330.

4 Mustafin T.G. *Generalized Jonsson Conditions and Description of Generalized Jonsson Theories of Boolean algebra* // Mathematical papers, 1998, vol. 1, № 2, p. 135–197.

5 Yeshkeev A.R. *Categorical positive theory, syntax and semantics of logical systems, Proceedings of the Russian school-seminar, dedicated to 100 anniversary — birthday of Kurt Gödel, 23–27 August 2006, Irkutsk, Institute of Mathematics, Academy of State. Ped. University Press*, 2006, 124, p. 28–32.

6 Itay Ben-Yaacov. *Positive model theory and compact abstract theories* // Journal of Mathematical Logic, 2003, Vol. 3, № 1, p. 85–118.

7 Itay Ben-Yaacov. *Compactness and independence in non first order frameworks* // Bulletin of Symbolic logic, 2005, vol. 11, № 1, p. 28–50.

8 Yeshkeyev A.R. *Counting categorical Δ-PM theories. Abstracts*. 12th Inter-College Conference on Mathematics, Mechanics and Computer Science, Almaty, 2008.

9 Yeshkeyev A.R. *On Jonsson stability and some of its generalizations* // Fundamental and Applied Mathematics, vol. 8, Moscow State University, Computer Centre, 2008, p. 117–128.

10 Yeshkeyev A.R. *Yonsonovskie theory*, Karaganda: Publ. KSU, 2009, p. 250.

11 Yeshkeyev A.R., Meirambaeva N.K. *Properties of* $(\Sigma^+_{n+1}, \Sigma^+_{n+1})$ *atomic models* T-Δ-PM *- theory // Bulletin of the KNU*. — A series of mathematics, mechanics, computer science, 2008, № 3, Special Issue, p. 74–77.