

Псевдопериодические решения дифференциальных уравнений второго порядка с малыми возмущениями

Pseudoperiodic solutions of second-order differential equations with small perturbations

Алеуова З.Ж.¹, Сартабанов Ж.А.²

¹Актюбинский университет им. С.Баишева (e-mail: zaleuova@mail.ru);

²Актюбинский государственный университет им. К.Жубанова

Макалада екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің псевдопериодты шешімдері үшін кіші параметр әдісі негізделеді. Потенциалы параметрден үзіліссіз периодты болғандағы сызықты екінші ретті дифференциалдық теңдеудің псевдопериодты шешімдерінің болуының жеткілікті шарты, екінші ретті дифференциалдық теңдеулердің шешімдерінің псевдопериодты шарты тағайындалады және қойылған есепті шешу үшін қолданылатын айқындалмаған функция туралы теореманың аналогы келтіріледі.

This article deals with the substantiation of the method of small parameter for pseudoperiodic solutions of second-order differential equations. Sufficient conditions of the existence of the only pseudoperiodic solution of second-order linear equation with periodically parameter dependent potential are obtained, were determined the conditions of pseudoperiodic solutions and is given the implicit function theorem analog applied to the assigned task.

Функцию $f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$, порожденную непрерывной в $R \times R^m \times R^m$ периодической функцией

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega) = f(\tau, t, \alpha) \in C(R \times R^m \times R^m), k \in Z^m,$$

назовем псевдопериодической [1] с периодами $\theta, \omega = (\omega_1, \dots, \omega_m)$, где $\tau \in R = (-\infty, +\infty)$; $t = (t_1, \dots, t_m) \in R \times \dots \times R = R^m$; $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in R \times \dots \times R = R^m$; периоды $\omega_0 = \theta, \omega_1, \dots, \omega_m$ — рационально несоизмеримые положительные постоянные; $k\omega = (k\omega_1, \dots, k\omega_m)$ — кратный вектор-период; $k = (k_1, \dots, k_m) \in Z \times \dots \times Z = Z^m$; Z — множество целых чисел; $e = (1, \dots, 1)$ — m -вектор.

Введем в рассмотрение дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + q^2(\alpha)x = f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) + \mu F(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, x, \frac{dx}{d\tau}) \quad (1)$$

с (θ, ω, ω) -псевдопериодической по (τ, t, α) правой частью, которая при $\mu = 0$ обращается в псевдопериодический осциллятор

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + q^2(\alpha)x = f(\tau, e\tau + \alpha, \alpha), \quad (2)$$

где $t = \alpha + e\tau, q(\alpha), f(\tau, t, \alpha), F(\tau, t, \alpha, x, x')$ — непрерывные; (θ, ω, ω) — периодические по $(\tau, t, \alpha) \in R \times R^m \times R^m$ функции; $\mu > 0$ — малый параметр.

В дальнейшем важно установление существования единственного (θ, ω, ω) -псевдопериодического решения линейного уравнения (2), которое связано с отсутствием таких решений однородного уравнения

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + q^2(\alpha)x = 0 \quad (3)$$

с положительным непрерывным ω -периодическим потенциалом

$$0 < q(\alpha + k\omega) = q(\omega) \in C(R^m), k \in Z^m, \quad (4)$$

удовлетворяющим условию

$$2\pi\theta^{-1}l < q(\alpha) < 2\pi\theta^{-1}(l+1) \quad (5)$$

с некоторым целым $l \in \bar{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$.

При условии (5) для матрицы Вронского

$$X(\tau, \alpha) = \begin{bmatrix} \cos q(\alpha)\tau & \frac{1}{q(\alpha)} \sin q(\alpha)\tau \\ -q(\alpha) \sin q(\alpha)\tau & \cos q(\alpha)\tau \end{bmatrix}$$

выполнено неравенство

$$\det[X(\theta, \alpha) - E] = 2 \sin q(\alpha) \frac{\theta}{2} \neq 0. \quad (6)$$

Очевидно, что соотношение (6) гарантирует отсутствие ненулевых псевдопериодических с периодом (θ, ω) решений однородного уравнения (3). Тогда легко показать, что неоднородное уравнение (2) при условии

$$f(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega) = f(\tau, t, \alpha) \in C(R \times R^m \times R^m), \quad k \in Z^m, \quad (7)$$

допускает единственное (θ, ω, ω) -псевдопериодическое решение $x_*(\tau, \alpha + e\tau, \alpha)$, которое можно представить в виде

$$x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) = \frac{1}{2q(\alpha) \sin q(\alpha) \frac{\theta}{2}} \int_{(\tau, \alpha + e\tau)}^{(\tau + \theta, e\tau + \alpha)} \cos[q(\alpha)(\tau - s + \frac{\theta}{2})] f(s, \chi, \alpha) d_e(s, \chi), \quad (8)$$

где интегрирование произведено вдоль прямой, параллельной главной диагонали пространства точек (τ, t) с выходом первообразной подынтегральной функции на расширение из этого же пространства в пределах, указанных в выражении (8).

Таким образом, имеем следующую теорему.

Теорема 1. Пусть выполнены условия (4), (5) и (7). Тогда уравнение (2) имеет единственное (θ, ω, ω) -псевдопериодическое решение $x_*(\tau, \alpha + e\tau, \alpha)$, представимое соотношением (8).

Действительно, из условий теоремы следует существование интеграла (8) и непосредственно проверяется, что он (θ, ω, ω) -псевдопериодичен и удовлетворяет уравнению (2).

Единственность доказывается методом от противного на основе отсутствия ненулевых псевдопериодических решений уравнения (3) в силу условия (5). Далее, предположим выполненными условия псевдопериодичности непрерывности по τ, t, α и липшицевости по x, x' вида

$$F(\tau + \theta, \alpha + e\tau + k\omega, \alpha + k\omega, x, x') = F(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, x, x') \in C(R \times R^m \times R^m \times R_\Delta^n \times R_\Delta^n), \quad k \in Z^m; \quad (9)$$

$$|F(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, x, x') - F(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, y, y')| \leq L \sqrt{(x - y)^2 + (x' - y')^2} \quad (10)$$

с липшицевой константой $L > 0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (4), (7), (9) и (10). Тогда, для того чтобы решение $x(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha))$ уравнения (1) с начальным условием

$$x(0, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)) = u(\alpha), \quad (1_0)$$

$$\frac{d}{d\tau} x(0, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)) = u'(\alpha)$$

с непрерывными при $\alpha \in R^m$ (θ, ω, ω) -периодическими начальными данными $u(\alpha), u'(\alpha)$ было (θ, ω, ω) -псевдопериодическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{aligned} x(\theta, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)) &= x(0, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)), \\ \frac{dx}{d\tau}(\theta, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)) &= \frac{dx}{d\tau}(0, \alpha, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha)). \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство следует из единственности решения начальной задачи (1)–(1₀), причем учтем, что из ω -периодичности начальных данных следует ω -периодичность решения по α . Действительно, если решение $x(\tau, t, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha))$ уравнения (1) (θ, ω, ω) -псевдопериодично, то очевидна выполнимость условия (11). Обратно, в силу условий (4), (7) и (9), наряду с решением $x(\tau, t, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha))$, функция $x(\tau + \theta, t, \alpha, u(\alpha), u'(\alpha))$ также является решением уравнения (1), причем в силу (11) они удовлетворяют одному и тому же начальному условию. Следовательно, они совпадают всюду при $\tau \in R$ для любых $\alpha \in R^m$. Таким образом, теорема 2 доказана.

Теперь рассмотрим систему функциональных уравнений вида

$$\Phi(\alpha, u, \mu) = 0, \quad (12)$$

с малым параметром $\mu > 0$, условием

$$\Phi(\alpha, 0, 0) = 0, \quad (13)$$

условием периодичности и гладкости вида

$$\Phi(\alpha + k\omega, u, \mu) = \Phi(\alpha, u, \mu) \in C_{\alpha, u, \mu}^{(0,1,0)}(R^m \times R_{\Delta}^n \times R_{\delta}^+), k \in Z^m, \quad (14)$$

и с условием неособенности матрицы $J(\alpha, u, \mu) = \frac{\partial \Phi(\alpha, u, \mu)}{\partial u}$ Якоби,

$$\det J(\alpha, 0, 0) \neq 0, \alpha \in R^m, \quad (15)$$

где $R_{\Delta}^n = \{u \in R^n : |u| \leq \Delta = \text{const} > 0\}$, $R_{\delta}^+ = [0, \delta]$, $\delta = \text{const} > 0$.

Тогда можно сформулировать теорему о существовании неявной периодической относительно $\alpha \in R^m$ функции $u(\alpha, \mu)$ для достаточно малых значений малого параметра $\mu \in R_{\delta}^+$.

Теорема 3. При выполнении условий (13)–(15) найдется некоторое число δ_* из промежутка $0 < \delta_* \leq \delta$ такое, что система уравнений (12) имеет единственное ω -периодическое по $\alpha \in R^m$ непрерывное в $R^m \times R_{\delta_*}^+$ решение $u = u_*(\alpha, \mu)$, удовлетворяющее условию $u_*(\alpha, 0) = 0$.

Теорема 3 доказывается аналогично доказательству теоремы о существовании непрерывной обычной неявной функции. Поэтому ее доказательство опускаем. В дальнейшем, усиливая условие (10), заменим его условием аналитичности функции:

$$F(\tau + \theta, t + k\omega, \alpha + k\omega, x, x') = F(\tau, t, \alpha, x, x') \in C_{\tau, t, \alpha, x, x'}^{0,0,0,\infty,\infty}(R \times R^m \times R^m \times R_{\Delta}^n \times R_{\Delta}^n), k \in Z^m. \quad (16)$$

Сформулируем основную теорему, которая является обобщением метода возмущений [2] на псевдопериодический случай.

Теорема 4. Пусть выполнены условия (4), (5), (7) и (16). Тогда для достаточно малых значений параметра $\mu \in R_{\delta}^+$ уравнение (1) допускает единственное (θ, ω, ω) -псевдопериодическое решение $\tilde{x}(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, \mu)$, которое обращается в решение (8) $x_*(\tau, \alpha + e\tau, \alpha)$ линейного уравнения (2) при $\mu = 0$: $\tilde{x}(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, 0) = x_*(\tau, \alpha + e\tau, \alpha)$.

При условиях теоремы 4 решение $x(\tau, \alpha + e\tau, \alpha, u, u', \mu)$ уравнения (1) с начальным условием

$$x(0, \alpha, \alpha, u, u', \mu) - x_*(0, \alpha, \alpha) = u(\alpha, \mu) = u(\alpha + k\omega, \mu) \in C(R^m \times R_{\delta}^+),$$

$$\frac{d}{d\tau} x(0, \alpha, \alpha, u, u', \mu) - \frac{d}{d\tau} x_*(0, \alpha, \alpha) = u'(\alpha, \mu) = u'(\alpha + k\omega, \mu) \in C(R^m \times R_{\delta}^+), k \in Z^m, \quad (1_0)$$

можно представить в виде степенного ряда относительно $u = u(\alpha, \mu)$, $u' = u'(\alpha, \mu)$ и μ :

$$\begin{aligned} x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, u, u', \mu) &= x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) + z_1(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)u + \\ &+ z_2(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)u' + z_3(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)\mu + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Разложив правую часть уравнения (1) в степенной ряд относительно x и $x' = \frac{dx}{d\tau}$, а затем подставив (17) в (1) на основе метода неопределенных коэффициентов, получим последовательность линейных дифференциальных уравнений рекуррентного характера для определения коэффициентов степенного ряда (17). Тогда, в частности, для коэффициентов z_1 и z_2 , имеем уравнения с начальными условиями

$$\begin{aligned} z_1|_{\tau=0} &= 1, \quad \frac{dz_1}{d\tau}|_{\tau=0} = 0, \\ z_2|_{\tau=0} &= 0, \quad \frac{dz_2}{d\tau}|_{\tau=0} = 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что решениями этих задач являются

$$z_1 = \cos q(\alpha)\tau, \quad z_2 = \frac{1}{q(\alpha)} \sin q(\alpha)\tau. \quad (18)$$

Подставив решения (18) в ряд (17), получим:

$$x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, u, u', \mu) = x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha) + \cos q(\alpha)\tau u + \frac{1}{q(\alpha)} \sin q(\alpha)\tau u' + z_3(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)\mu + \dots \quad (19)$$

Чтобы выделить из соотношения (19) (θ, ω, ω) -псевдопериодические решения уравнения (1), воспользуемся условием (11) теоремы 2, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha, u, u', \mu) &\equiv [\cos q(\alpha)\theta - 1]u + \frac{1}{q(\alpha)} \sin q(\alpha)\theta + [z_3(\theta, \alpha, \alpha) - z_3(0, \alpha, \alpha)]\mu + \dots, \\ \varphi_2(\alpha, u, u', \mu) &\equiv -q(\alpha) \sin q(\alpha)\theta u + [\cos q(\alpha) - 1]u' + \left[\frac{dz_3(\theta, \alpha, \alpha)}{d\tau} - \frac{dz_3(0, \alpha, \alpha)}{d\tau} \right] \mu + \dots. \end{aligned} \quad (20)$$

Положив $\Phi(\alpha, u, u', \mu) = (\varphi_1(\alpha, u, u', \mu), \varphi_2(\alpha, u, u', \mu))$, в силу условий теоремы и соотношения (20) нетрудно показать, что

$$\Phi(\alpha + k\omega, u, u', \mu) = \Phi(\alpha, u, u', \mu) \in C_{\alpha, u, u', \mu}^{(0, \infty, \infty, \infty)}(R^m \times R_{\Delta}^n \times R_{\Delta}^n \times R_{\delta}^+), \quad (21)$$

$$\Phi(\alpha, 0, 0, 0) = 0, \quad \alpha \in R^m, \quad (22)$$

$$\det J(\alpha, 0, 0, 0) = \det \frac{\partial \Phi(\alpha, 0, 0, 0)}{\partial (u, u')} = 2 \sin q(\alpha) \frac{\theta}{2} \neq 0. \quad (23)$$

Из соотношений (21)–(23) следует выполнение условий теоремы 3, согласно которой существует постоянная $\delta_* > 0$ из R_{δ}^+ такая, что система (20) допускает единственное непрерывное решение

$$u = u_*(\alpha, \mu), \quad u' = u'_*(\alpha, \mu), \quad (24)$$

ω -периодическое по $\alpha \in R^m$, удовлетворяющее условию $u_*(\alpha, 0) = 0, u'_*(\alpha, 0) = 0$.

Тогда, подставив функции (24) в решение (17), получим искомое единственное (θ, ω, ω) -псевдопериодическое решение $\tilde{x}(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, \mu) = x(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, u_*(\alpha, \mu), u'_*(\alpha, \mu), \mu)$, которое обладает свойством $\tilde{x}(\tau, e\tau + \alpha, \alpha, 0) = x_*(\tau, e\tau + \alpha, \alpha)$. Теорема 4 доказана полностью.

В заключение отметим, что при $\alpha = 0$ из полученных результатов следуют соответствующие утверждения о квазипериодических решениях дифференциальных уравнений второго порядка.

Данная заметка является продолжением исследований [3, 4].

References

1. *Urabe M.* Green functions of pseudoperiodic differential operators // *Lect. Notes. Math.* — 1971. — 243. — P. 106–122.
2. *Malkin I.G.* Liapunov and Poincare methods in the nonlinear perturbation theory. — M.-L.: GITTL, 1949. — 244 p.
3. *Sartabanov Zh.* The application of the idea of Poincare method to the case of pseudoperiodic functions // *News of the AS KazSSR. Ph. and maths serie.* — 1979. — № 1. — P. 84–86.
4. *Sartabanov Zh.* Pseudoperiodic solutions of a system of integro-differential equations // *Ukr. math. Journal.* — 1989. — № 1. — P. 125–130.