УДК 517.51

Ш.Билал, А.Б.Даржанова

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы
(E-mail: bilal44@mail.ru)

Об одном трехвесовом неравенстве типа Харди

В статье получены необходимые и достаточные условия выполнения весового неравенства типа Харди. Условия на весовые функции определяют и непрерывные компактные вложения. Найдены двухсторонние оценки, совпадающие по порядку. Даны критерии компактности оператора вложения. Доказаны некоторые леммы, являющиеся основополагающими при доказательстве основных теорем методом локализации.

Ключевые слова: весовые неравенства, неравенства типа Харди, весовые функции, теоремы вложения, компактность вложения.

С возникновением нового направления в функциональном анализе — теоремы вложения функциональных пространств — выяснилось, что изучение многих качественных свойств дифференциальных и интегральных операторов эквивалентно установлению соответствующих теорем вложения с теми или иными свойствами. Особенно подход дает плодотворные результаты в установлении свойств сингулярных операторов и теорем вложений весовых пространств. В этом направлении получены фундаментальные результаты в работах С.М.Никольского, Л.Д.Кудрявцева, А.Куфнер, П.И.Лизоркина, В.Г.Мазья, Ж.Л.Лионса, Э.Мадженеса, А.Пича, М.Ш.Бирмана, М.Отелбаева, С.И.Похожаева, Р.Ойнарова, В.И.Буренкова, К.Бойматова, В.Д.Степанова и других [1–21].

Пусть $W_p' \equiv W_p'(\rho, \upsilon; y)$ — пространство, полученное замыканием множества финитных, абсолютно непрерывных на $J=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, функций $f\left(f \in \overset{\circ}{A}C(J)\right)$ по норме $\|f\|_{W_p'} = \|\rho f'\|_p + \|\upsilon f\|_p$; $1 \le p \le \infty$. $L_p \equiv L_p(J)$ — пространство измеримых на J функций f, для которых конечна норма

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int\limits_J |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} & \text{при} \quad 1 \le p < \infty; \\ \upsilon rai \sup\limits_{x\in J} |f(x)| & \text{при} \quad p = \infty; \end{cases}$$

$L_{s,r} \equiv L_s(r,J)$ — пространство измеримых на J функций t, с конечной нормой $\|f\|_{s,r} = \|rf\|_s$, $1 \le s \le \infty$.

Данная работа посвящена установлению необходимых и достаточных условий на весы, при которых имеют место непрерывные, компактные вложения в виде

$$\|rf\|_q \le c\left(\|\rho f'\|_\infty + \|\upsilon f\|_\infty\right). \tag{1}$$

Мы здесь будем считать, что ρ, υ, r — заданные весовые функции, определенные на интервале $J=(a,b)$, $-\infty \le a < b \le \infty$, удовлетворяют на этом интервале следующим требованиям:

$$0 < \rho(x) \in L_\infty^{loc}(J), \quad \rho^{-1}(x) \in L_1^{loc}(J);$$
$$0 < \upsilon(x) \in C^{loc}(J), \quad 0 \le r(x) \in C^{loc}(J).$$

Введем в рассмотрение следующие величины, характеризующие локальное поведение весовых функций:

$$\omega(x,y) = \sup\left\{ d > 0 : \int\limits_{x-d}^{x} \rho^{-1}(\tau)\, d\tau \le \int\limits_{x}^{x+y} \rho^{-1}(\tau)\, d\tau, (x-d, x+y] \subset J \right\};$$

$$d^+(x) = \sup\left\{ d > 0 : \sup_{x-\omega(x,d) \le t \le x+d} \upsilon(t) \int\limits_{x-\omega(x,d)}^{x+d} \rho^{-1}(\tau)\, d\tau \le 1, [x, x+d) \subset J \right\};$$

$$d^{-}(x)=\omega\left(x,d^{+}(x)\right).$$

Обозначим

$$\Delta(x)=\left[x-d^{-}(x),x+d^{+}(x)\right]=\left[x^{-},x^{+}\right],\quad \Delta^{-}(x)=\left[x-d^{-}(x),x\right],\quad \Delta^{+}(x)=\left[x,x+d^{+}(x)\right].$$

Лемма 1. Имеет место неравенство

$$\int\limits_{y-d^{-}(y)}^{y+d^{+}(y)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 2\int\limits_{x-d^{-}(x)}^{x+d^{+}(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\quad \forall y\in\Delta(x). \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что найдутся точки $x_0,y_0\in\Delta(x_0)$ такие, что

$$\int\limits_{y_0-d^{-}(y_0)}^{y_0+d^{+}(y_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau>2\int\limits_{x_0-d^{-}(x_0)}^{x_0+d^{+}(x_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau.$$

Отсюда $\int\limits_{y_0}^{y_0+d^{+}(y_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau>2\int\limits_{x_0}^{x_0+d^{+}(x_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau.$ Умножая обе части неравенства на $\sup\limits_{t\in\Delta(x_0)}\upsilon(t),$ получим

$$1\ge\sup_{t\in\Delta(x_0)}\upsilon(t)\int\limits_{y_0}^{y_0+d^{+}(y_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau>2\sup_{t\in\Delta(x_0)}\upsilon(t)\int\limits_{x_0}^{x_0+d^{+}(x_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=\sup_{t\in\Delta(x_0)}\upsilon(t)\int\limits_{y_0}^{y_0+d^{+}(y_0)}\rho^{-1}(\tau)d\tau=1.$$

Это противоречие и доказывает лемму.

Следствие. Для всех $y\in\Delta^{\pm}(x)$ $\int\limits_{\Delta^{\pm}(y)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le 2\int\limits_{\Delta^{\pm}(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau.$

Лемма 2. Функции $\varphi^{-}(x)=x-d^{-}(x),\quad \varphi^{+}(x)=x+d^{+}(x)$ непрерывны и монотонно возрастают в J. При этом

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to b)}}\varphi^{-}(x)=a(b),\quad \lim_{\substack{x\to b\\(x\to a)}}\varphi^{+}(x)=b(a).$$

Лемма 3. $\forall f\in AC^{loc}(J)$ справедлива оценка

$$\sup_{t\in\Delta(x)}\left|f(t)\right|\le\int\limits_{\Delta(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left[\upsilon rai\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\rho(t)f'(t)\right|+\sup_{t\in\Delta(x)}\left|\upsilon(t)f(t)\right|\right]. \tag{3}$$

Лемма 4. Пусть $(\alpha;\beta)$ — ограниченный отрезок из $J=(a,b)$. Тогда справедливость неравенства $\|rf\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}\le c\|\rho f'\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}$ для всех $f\in AC\left(\overset{\circ}{\alpha},\beta\right)\left(f\in AC\left(\alpha,\overset{\circ}{\beta}\right)\right)$ эквивалентна условию

$$A=\sup_{\alpha\le x\le\beta}r(x)\int\limits_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau<\infty;$$
$$\left(A=\sup_{\alpha\le x\le\beta}r(x)\int\limits_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)d\tau<\infty\right), \tag{4}$$

где $AC\left(\overset{\circ}{\alpha},\beta\right)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $f(x)$ таких, что $f(\alpha)=0,$ а $AC\left(\alpha,\overset{\circ}{\beta}\right)$ — пространство функций $f(x)\in AC^{loc}(J)$ с $f(\beta)=0$. При этом для наименьшей константы C имеет место оценка $C_1A\le C\le C_2A$, где C_1,C_2 не зависят от весовых функций.

Доказательство достаточности. Пусть $f\in AC\left(\overset{\circ}{\alpha},\beta\right)$. Тогда $f(x)=\int\limits_{\alpha}^{x}f'(t)dt,$ умножая обе части на $r(x),$ имеем $r(x)f(x)=r(x)\int\limits_{\alpha}^{x}f'(t)dt.$ Отсюда

$$\left|r(x)f(x)\right| \le r(x)\int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)\left|\rho(t)f'(\tau)\right|d\tau \le r(x)\int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\times$$

$$\times\upsilon rai\sup_{t\in(\alpha,\beta)}\left|\rho(t)f'(\tau)\right| = r(x)\int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\bullet\left\|\rho f'\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}.$$

Итак,

$$\sup_{x\in(\alpha,\beta)}\left|r(x)f(x)\right| \le \sup_{x\in(\alpha,\beta)} r(x)\int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)d\tau\bullet\left\|\rho f'\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}.$$

Пусть $f\in AC\left(\alpha,\overset{\circ}{\beta}\right)$. Тогда $f(x) = -\int_{x}^{\beta} f'(t)\,dt;$

$$r(x)f(x) = -r(x)\int_{x}^{\beta} f'(t)\,dt,\quad \left|r(x)f(x)\right| \le r(x)\int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)\left|\rho(\tau)f'(\tau)\right|d\tau \le$$

$$\le r(x)\int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\bullet\upsilon rai\sup_{t\in(\alpha,\beta)}\left|\rho(t)f'(t)\right| = r(x)\int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\bullet\left\|\rho f'\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}.$$

Таким образом, $\left\|rf\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)} = \sup_{x\in(\alpha,\beta)}\left|r(x)f(x)\right| \le \sup_{x\in(\alpha,\beta)} r(x)\int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)d\tau\bullet\left\|\rho f'\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}.$

Необходимость. Пусть выполнено

$$\left\|rf\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)} \le c\left\|\rho f'\right\|_{L_\infty(\alpha,\beta)}. \tag{5}$$

Положим, что $f(x) = \int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau.$ Тогда, подставляя в (9) данное выражение, имеем:

$$A = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} r(x)\int_{\alpha}^{x}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le C.$$

Аналогично для $f(x) = \int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau,\quad A = \sup_{x\in(\alpha,\beta)} r(x)\int_{x}^{\beta}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau \le C.$

Лемма 5. Существует не более чем счетное множество точек $\{x_i\}$ таких, что $\underset{i}{U}\left[x_i - d^-(x_i), x_i + d^+(x_i)\right] = J,$ причем $x_{i+1} - d^-(x_{i+1}) = x_i + d^+(x_i).$

Доказательство. По лемме 2 функции $\varphi^{\pm}(x) = x \pm d^{\pm}(x)$ монотонно возрастающие и непрерывны. Покроем интервал $J = (a,b)$ отрезками $\Delta(x) = \left[x - d^-(x), x + d^+(x)\right]$. Докажем существование не более чем счетного количества таких интервалов, что $\underset{i}{U}\Delta(x_i) = J,$ причем $x_i + d^+(x_i) = x_{i+1} - d^-(x_{i+1}).$

Пусть $x_0\in J$. Строим отрезок $\Delta(x_0) = \left[x_0 - d^-(x_0), x_0 + d^+(x_0)\right]$. Процесс деления интервала направим от точки x_0 к правому концу. Если $x_0 + d^+(x_0) = b,$ то процесс построения интервала вправо завершается.

Если $x_0 + d^+(x_0) < b \le \infty,$ то тогда по определению $\varphi^-(x_0) < x_0 + d^+(x_0) < b = \varphi^-(b)$ и существует точка $\overline{x}$ такая, что $\varphi^-(\overline{x}) > x_0 + d^+(x_0)$. Следовательно, для значения $x_0 + d^+(x_0),$ заключенного между значениями непрерывной функции на концах отрезка $\left[x_0, \overline{x}\right],$ существует такая точка $x_1\in\left[x_0,\overline{x}\right],$ что $\varphi^-(x_1) = x_0 + d^+(x_0),$ т. е. $\varphi^-(x_1) = x_1 - d^-(x_1) = x_0 + d^+(x_0)$. Итак, мы построили отрезок

$$\Delta(x_1) \equiv \left[x_1 - d^-(x_1), x_1 + d^+(x_1)\right] \subset J^+;$$

$$x_1 - d^-(x_1) = x_0 + d^+(x_0).$$

Продолжая процесс, мы получим последовательность точек $\{x_i\}$ таких, что $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n < ... < b,$ т.е. возрастающую и ограниченную сверху. Эта последовательность имеет предел, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b.$ Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < b,$ то $d^+(x) = \lim\limits_{n\to\infty} d^+(x_n) = 0,$ что невозможно, и процесс покрытия интервала завершен. Покрывая аналогичным образом интервал, тем самым покроем весь интервал J^- не более чем счетным числом указанных отрезков. Лемма доказана.

Рассмотрим вопрос о существовании оценки

$$\|rf\|_S \le c\left(\|\rho f'\|_\infty + \|\upsilon f\|_\infty\right), \quad 1 \le s < \infty. \tag{6}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. Для вложения пространств $W^1_\infty \subset L_{s,r}$ $(1 \le s < \infty)$ или для выполнения неравенства (6) необходимо и достаточно выполнение условия

$$A = \left[\int\limits_J r^s(t)\left(\int\limits_{\Delta(t)} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^s dt\right] < \infty. \tag{7}$$

Если C — наименьшая *const* в (6), то существуют постоянные C_1, C_2 и $C_1\mathrm{A} \le C \le C_2\mathrm{A}.$

Доказательство. Необходимость. Пусть выполнено (6). Покроем J отрезками $\left\{\Delta^-(x_i)\right\}_{-\infty}^{\infty}.$

В силу леммы 1 и ее следствия имеет место оценка

$$\int\limits_{\Delta^-(x_i)} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 2\int\limits_{\Delta^-(x_{i+1})} \rho^{-1}(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Введем следующие функции:

$$\varphi_i^-(t) = \begin{cases} \int\limits_{x_{i-2}}^{t} \rho^{-1}(\tau)d\tau & \text{при} \quad t \in \bigcup\limits_{k=i-1}^{i+1} \Delta^-(x_k); \\ \int\limits_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\int\limits_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\int\limits_{t}^{x_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau & \text{при} \quad t \in \Delta^-(x_{i+2}); \\ 0 & \text{при} \quad t \,\overline{\in} \bigcup\limits_{k=i-1}^{i+2} \Delta^-(x_k), \end{cases}$$

$$f_N(t) = \sum_{i=-N}^{N} \varphi_i^-(t).$$

Оценим нормы $\left\|\varphi_i^-(t)\right\|_{W^1_\infty}$ и $\left\|\varphi_i^-(t)\right\|_{L_{S,r}}.$

По определению

$$\left\|\varphi_i^-(t)\right\|_{W^1_\infty} = \left\|\rho\left(\varphi_i^-\right)'\right\|_{L_\infty} + \left\|\upsilon\varphi_i^-\right\|_{L_\infty} \times$$

$$\times\left\|\rho\left(\varphi_i^-\right)'\right\|_{L_\infty} = \upsilon rai \sup_{x_{i-2}\le t\le x_{i+2}} \left\|\rho\left(\varphi_i^-\right)'\right\|_{L_\infty} = \max\left\{\upsilon rai \sup_{x_{i-2}\le t\le x_{i+1}} \left|\rho\left(\int\limits_{x_{i-2}}^{t} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right)'\right|;\right.$$

$$\left.\upsilon rai \sup_{x_{i+1}\le t\le x_{i+2}} \left|\rho(t)\left[\int\limits_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\int\limits_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\int\limits_{t}^{x_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right]'\right|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{1, \upsilon rai \sup_{x_{i+1}\le t\le x_{i+2}} \left|\rho(t)\cdot 14\left(\int\limits_{x_{i+2}}^{t} \rho^{-1}(\tau)d\tau\right)'\right|\right\} \le \max\{1,14\} = 14.$$

При этом мы воспользовались неравенством (8), т. е.

$$\int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau = \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau + \int_{x_{i-1}}^{x_{i}} \rho^{-1}(\tau)d\tau + \int_{x_{i}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le$$

$$\le 3\int_{x_{i-1}}^{x_{i}} \rho^{-1}(\tau)d\tau + \int_{x_{i}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 7\int_{x_{i}}^{x_{i+1}} \rho^{-1}(\tau)d\tau \le 14\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}} \rho^{-1}(\tau)d\tau.$$

Далее

$$\left\|\upsilon\varphi_i^-\right\|_{L_\infty} = \max\left\{\sup_{x_{i-2}\le t\le x_{i+1}}\left|\upsilon(t)\int_{x_{i-2}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right|;\right.$$

$$\left.\sup_{x_{i+1}\le t\le x_{i+2}}\upsilon(t)\left|\int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\left(\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^{-1}\int_{t}^{x_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right|\right\}\le$$

$$\le\max\left\{7\sup_{x_{i-2}\le t\le x_{i-1}}\upsilon(t)\int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}}\rho^{-1}(\tau)d\tau,\quad 5\sup_{x_{i-1}\le t\le x_{i}}\upsilon(t)\int_{x_{i-1}}^{x_{i}}\rho^{-1}(\tau)d\tau;\right.$$

$$\left.7\sup_{x_{i}\le t\le x_{i+1}}\upsilon(t)\int_{x_{i}}^{x_{i+1}}\rho^{-1}(\tau)d\tau;14\sup_{x_{i+1}\le t\le x_{i+2}}\upsilon(t)\int_{x_{i+1}}^{x_{i+2}}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right\}=$$

$$=\max\{7/2,5/2,7/2;7\}=7.$$

Таким образом, $\left\|\varphi_i^-(t)\right\|_{W_\infty^1}\le 14+7=21.$

Далее

$$\left\|r\varphi_i^-\right\|_S^S \ge \int_{x_{i-2}}^{x_{i+1}} r^s(t)\left(\int_{x_{i-2}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^s dt \ge \int_{x_{i-2}}^{x_{i}} r^s(t)\left(\int_{x_{i-2}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^s dt \ge$$

$$\ge 2^{-s}\int_{x_{i-1}}^{x_i} r^s(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^s dt,\quad \text{где}\quad \int_{x_{i-2}}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau \ge \frac{1}{2}\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau$$

при $x_{i-1}\le t\le x_i$. Теперь оценим нормы $\left\|f_N(t)\right\|_{W_\infty^1}$ и $\left\|f_N(t)\right\|_{L_{S,r}}$.

Заметим, что пересекаются носители только четырех функций $\varphi_{i-2}^-,\varphi_{i-1}^-,\varphi_i^-,\varphi_{i+1}^-$. Получим

$$\left\|f_N(t)\right\|_{W_\infty^1} = \left\|\sum_{i=-N}^{N}\varphi_i^-\right\|_{W_\infty^1} \le \sup_i\left(\left\|\varphi_{i-2}^-\right\|_{W_\infty^1}+\left\|\varphi_{i-1}^-\right\|_{W_\infty^1}+\left\|\varphi_{i}^-\right\|_{W_\infty^1}+\left\|\varphi_{i+1}^-\right\|_{W_\infty^1}\right)\le 4.21=84;$$

$$\left\|rf_N\right\|_S^S \ge 2^{-S}\sum_{i=-N}^{N}\int_{x_{i-1}}^{x_i} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt = 2^{-S}\int_{x_{-N-1}}^{x_N} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt.$$

Используя условия вложения (6), имеем

$$84C \ge C\left\|f_N\right\|_{W_\infty^1} \ge \left\|rf_N\right\|_S \ge \frac{1}{2}\left[\int_{x_{-N-1}}^{x_N} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S}.$$

Отсюда при $N\to\infty$ получим

$$\left[\int_J r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S} \le 168C \quad \text{или}\quad \frac{1}{168}\mathrm{A}\le C. \tag{9}$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Покроем J отрезками $\{\Delta(x_i)\}$. Пусть

$$\Omega(x_i)=\Delta^-(x_i^-)\cup\Delta(x_i)\cup\Delta^+(x_i^+)\equiv\left(x_i^- - d^-(x_i^-),x_i^+ - d^+(x_i^+)\right),$$

где $x_i^- = x_i - d^-(x_i)$, $x_i^+ = x_i + d^+(x_i)$. Тогда кратность покрытия J отрезками $\Omega(x_i)$ не более трех. Это следует из того, что $x_i^- - d^-(x_i^-)\ge x_{i-1}^-$ и $x_i^+ - d^+(x_i^+)\ge x_{i+1}^+$. Пусть выполнено (7). Для $f\in W_\infty^1$ $\|rf\|_{S,\Delta^-(x_i)}\le\left\|r(f-f^-)\right\|_{S,\Delta^-(x_i)}+\left\|rf^-\right\|_{S,\Delta^-(x_i)}$, где $f^-=f(x_i^-)$. Для функции $\varphi(t)=f(t)-f^-$, $t\in\Delta^-(x_i)$, по формуле Ньютона-Лейбница — $\varphi(t)=\int_{x_i^-}^{t}f'(\tau)d\tau$ или $|r(t)\varphi(t)|\le r(t)\int_{x_i^-}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\|\rho f'\|_{L_\infty(\Delta^-(x_i))}$.

Отсюда $\left(\int_{\Delta^-(x_i)}|r(t)\varphi(t)|^s dt\right)^{1/S}\le\int_{\Delta^-(x_i)}r^s(t)\left(\int_{x_i^-}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\|\rho f'\|_{L_\infty(\Delta^-(x_i))}$.

Пользуясь этим, получим

$$\left\|r(f-f^-)\right\|_{S,\Delta^-(x_i)}\le C\left[\int_{\Delta^-(x_i)}r^S(t)\left(\int_{x_i^-}^{t}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S}\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x_i))}. \tag{10}$$

Для оценки нормы $\left\|rf^-\right\|_{S,\Delta^-(x_i)}$ также воспользуемся формулой Ньютона-Лейбница.

Для $f\in AC^{loc}(J)$ и $s,t\in\Delta(x)$

$$|f(t)|\le\int_S^t|f'(\tau)|d\tau+|f(s)|\le\int_{\Delta(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\cdot\upsilon rai\sup_{t\in\Delta(x)}|\rho f'|+|f(s)|.$$

После некоторых элементарных преобразований получим

$$\sup_{t\in\Delta(x)}|f(t)|\le\int_{\Delta(x)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x))}. \tag{11}$$

Неравенство (11) для f^- запишется в виде

$$\left|f^-\right|\le\int_{\Delta(x_i^-)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x_i^-))}.$$

Откуда

$$\left\|rf^-\right\|_{S,\Delta^-(x_i)}\le\left[\int_{\Delta^-(x_i)}r^S(t)\left(\int_{\Delta^-(x_i)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S}\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x_i^-))}. \tag{12}$$

Используя неравенство

$$\int_{\Delta(x_i)\cup(x_i^-,t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\le\frac{5}{2}\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau,\quad t\in\Delta^-(x_i),$$

из (10), (12) получим

$$\begin{aligned}\|rf\|_{S,\Delta^-(x_i)}&\le\left[\int_{\Delta^-(x_i)}r^S(t)\left(\int_{\Delta(x_i^-)\cup(x_i^-,t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S}\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x_i^-))\cup(x_i^-,t)}\le\\&\le\frac{5}{2}\left[\int_{\Delta^-(x_i)}r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)d\tau\right)^S dt\right]^{1/S}\cdot\|f\|_{W_\infty^1(\Omega(x_i))}.\end{aligned} \tag{13}$$

Таким же образом при $t \in \Delta^{+}(x_i)$:

$$\|rf\|_{S,\Delta^{+}(x_i)} \le \left\|r\left(f-f^{+}\right)\right\|_{S,\Delta^{+}(x_i)} + \|rf^{+}\|_{S,\Delta^{+}(x_i)},$$

где $f^{+} = f\left(x_i^{+}\right)$. Используя формулу Ньютона-Лейбница, как в случае с f^{-}, получим

$$\left\|r\left(f-f^{+}\right)\right\|_{s,\Delta^{+}(x_i)} \le \left[\int_{\Delta^{+}(x_i)} r^{s}(t)\left(\int_{t}^{x_i^{+}} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{s} dt\right]^{1/s} \cdot \|f\|_{W_\infty^1(\Delta(x_i))}.$$

На основании (12)

$$\|rf^{+}\|_{S,\Delta^{+}(x_i)} \le \left[\int_{\Delta^{+}(x_i)} r^{S}(t)\left(\int_{\Delta\left(x_i^{+}\right)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{S} dt\right]^{1/S} \cdot \|f\|_{W_\infty^1\left(\Delta\left(x_i^{+}\right)\right)}.$$

Откуда

$$\|rf\|_{S,\Delta^{+}(x_i)} \le \frac{5}{2}\left[\int_{\Delta^{+}(x_i)} r^{S}(t)\left(\int_{\Delta(t)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{S} dt\right]^{1/S} \cdot \|f\|_{W_\infty^1(\Omega(x_i))}. \tag{14}$$

Тогда из (13), (14) имеем

$$\|rf\|_{s,\Delta(x_i)} \le \frac{5}{2}\left[\int_{\Delta(x_i)} r^{s}(t)\left(\int_{\Delta(x_i)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{s} dt\right]^{1/s} \cdot \|f\|_{W_\infty^1(\Omega(x_i))}$$

и по лемме 5 (существует не более чем счетное множество $\Delta(x_i)$, таких что $\underset{i}{U}\Delta(x_i) = J$)

$$\|rf\|_{S,J}^{S} = \int_J |rf|^{S} dt = \sum_i \int_{\Delta(x_i)} |rf|^{S} dt \le \left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^{S} \sum_i \int_{\Delta(x_i)} r^{s}(t)\left(\int_{\Delta(t)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{S} dt \times$$

$$\times \|f\|_{W_\infty'(J)}^{S} = \left(\frac{15}{2}\right)^{S} \int_J r^{s}(t)\left(\int_{\Delta(t)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{S} dt \times \|f\|_{W_\infty'(J)}.$$

Итак,

$$\|rf\|_{S} \le \frac{15}{2}\left[\int_J r^{S}(t)\left(\int_{\Delta(t)} \rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^{S} dt\right]^{1/S} \times \|f\|_{W_\infty'(J)}. \tag{15}$$

В силу произвольности $f \in W_\infty'$ заключаем, что $W_\infty' \subset L_{S,r}$ и $C \le \frac{15}{2}\mathrm{A}$. Это неравенство вместе с (9) показывает, что $C_1\mathrm{A} \le C \le C_2\mathrm{A}$. Теорема доказана.

Теорема 2. Вложение пространств $W_\infty' \subset L_{S,r}$ компактно тогда и только тогда, когда $\mathrm{A} < \infty$.

Доказательство. Необходимость. Пусть вложение $W_\infty' \subset L_{S,r}$ компактно. Тогда по теореме 1 $\mathrm{A} < \infty$.

Достаточность. Пусть $\mathrm{A} < \infty$. Покажем, что единичный шар $\|f\|_{W_\infty'} \le 1$ компактен в $L_{S,r}(J)$. Не ограничивая общности, положим, что $a = -\infty$, $b = \infty$. Доказательство основано на проверке выполнения условий теоремы Рисса [22].

Покажем выполнение условия

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\|f\|_{W_\infty'} \le 1} \left(\int_{|t|\ge N} |rf|^{S} dt\right)^{1/S} = 0. \tag{16}$$

При фиксированном N покроем множество $(-\infty, N] \cup [N, \infty)$ отрезками $\Delta(x_i)$ $(i = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ так, чтобы $x_{\pm 1} = \pm N$ и $x_i^{-} = x_{i-1}^{+}$. Тогда из (15) получим

$$\sup_{\|f\|_{W_\infty}\le 1}\left(\int_{|t|\ge N}|rf|^s\,dt\right)^{1/S}\le\frac{15}{2}\left[\int_{J_{-N}} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^S dt+\int_{J_N} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^S dt\right]^{1/S},$$

где $J_{-N}=(-\infty,N]$, $J_N=[N,\infty)$. Из (7) следует, что при $N\to\infty$

$$\int_{J_{-N}} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^S dt\to 0 \text{ и } \int_{J_N} r^S(t)\left(\int_{\Delta(t)}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\right)^S dt\to 0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left(\int\limits_{|t|\ge N}|rf|^S\,dt\right)^{1/S}=0.$ Покажем выполнение остальных условий теоремы Рисса. Для этого функцию $r(t)f(t)$ представим в виде

$$r(t)f(t)=X_N(t)r(t)f(t)+\left(1-X_N(t)\right)r(t)f(t),$$

где $X_N(t)=\begin{cases}1, & -N\le t\le N;\\ 0, & |t|>N.\end{cases}$

Введем обозначения $f_N(t)=X_N(t)f(t),\quad f_{1-N}(t)=\left(1-X_N(t)\right)f(t)$.

Тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)f(t+h)-r(t)f(t)\right\|_S\le\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)f_N(t+h)-r(t)f_N(t)\right\|_S+$$

$$+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)f_{1-N}(t+h)\right\|_S+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t)f_{1-N}(t)\right\|_S.$$

Рассмотрим в отдельности каждое слагаемое. При этом, используя теорему 1 и неравенство (16), получим

$$\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)f_{1-N}(t+h)\right\|_S+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t)f_{1-N}(t+h)\right\|_S\le\frac{2}{3}\varepsilon;$$

$$\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)f_N(t+h)-r(t)f_N(t)\right\|_S=\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)\left(f_N(t+h)-f_N(t)\right)+f_N(t)\left(r(t+h)-r(t)\right)\right\|_S\le$$

$$\le\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|r(t+h)\left(f_N(t+h)-f_N(t)\right)\right\|_S+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\|f_N(t)\left(r(t+h)-r(t)\right)\right\|_S=$$

$$=\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)\left(f(t+h)-f(t)\right)\right|dt\right)^{1/S}+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left(\int_{-N}^{N}\left|f(t)r(t+h)-r(t)\right|^S dt\right)^{1/S}\le$$

$$\le\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left[\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)\right|^s dt\right)^{1/S}\bullet\sup_{-N\le t\le N}\left|f(t+h)-f(t)\right|\right]+\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left[\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)-r(t)\right|^S dt\right)^{1/S}\bullet\sup_{-N\le t\le N}\left|f(t)\right|\right].$$

На основании формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\sup_{-N\le t\le N}\left|f(t+h)-f(t)\right|\le\sup_{-N\le t\le N}\left\{\int_t^{t+h}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\bullet\sup_{t\le s\le t+h}\left|\rho(s)f'(s)\right|\right\}\le\sup_{-N\le t\le N}\int_t^{t+h}\rho(\tau)\,d\tau\bullet\|f\|_{W_\infty^r}.$$

По теореме об абсолютной непрерывности интеграла Лебега [23] для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_1>0$, что $\sup\limits_{-N\le t\le N}\int\limits_t^{t+h}\rho^{-1}(\tau)d\tau<\varepsilon,$ как только $|h|<\delta_1$. Тогда

$$\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left[\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)\right|^S dt\right)^{1/S}\bullet\sup_{-N\le t\le N}\left|f(t+h)-f(t)\right|\right]\le$$

$$\le\sup_{\|f\|_{W_\infty^r}\le 1}\left\{M_1\sup_{-N\le t\le N}\int_t^{t+h}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau\bullet\|f\|_{W_\infty^r}\right\}\le M_1\sup_{-N\le t\le N}\int_t^{t+h}\rho^{-1}(\tau)\,d\tau<\frac{\varepsilon}{6}$$

для $\left|h\right|<\delta_1<\frac{\varepsilon}{6}M_1$. Для непрерывной в среднем функции $r(t)$ для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta_2>0$, что $\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)-r(t)\right|^S dt\right)^{1/S}<\varepsilon,$ как только $\left|h\right|<\delta_2$. Тогда $\sup_{\|f\|_{W_\infty}\le 1}\left[\left(\int_{-N}^{N}\left|r(t+h)-r(t)\right|^S dt\right)^{1/S}\bullet\sup_{-N\le t\le N}\left|f(t)\right|\right]<\frac{\varepsilon}{6}$ для $\delta_2<\frac{\varepsilon}{6}M_2$. Выбирая $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\},$ построим конечное покрытие отрезка $[-N,N]=\bigcup_{i=-N}^{N}\Delta(x_i),$ и полученные оценки будут справедливы на каждом из них. Теорема доказана.

Список литературы

1 *Никольский С.М.* Приближение функций многих переменных и теорем вложния. — М.: Наука, 1977.

2 *Кудрявцев Л.Д.* Прямые и обратные теоремы вложения. Приложения к решению вариационным методом эллиптических уравнений // Тр. МИАН СССР. — 1959. — Т. 55. — С. 1–181.

3 *Куфнер А., Опиц Б. и др.* Точные теоремы вложения одного класса весовых пространств С.Л.Соболева // ДАН УССР. 1988. — № 1. — С. 22–26.

4 *Лизоркин П.И., Отелбаев М.* Теоремы вложения компактности для пространств соболевского типа с весами // Матем. сб. — 1979. — Т. 108, № 3. — С. 358–377 (4.1); Мат. сб. — 1980. — Т. 112, № 1. — С. 56–85 (4.11).

5 *Лизоркин П.И., Никольский С.М.* Коэрцитивные свойства эллиптического уравнения с вырождением и обобщенной правой частью // Тр. МИ АН СССР. — 1983. — Т.161. — С. 157–183.

6 *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1985.

7 *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы внешних нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972. — 587 с.

8 *Лионс Ж.Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971. — 372 с.

9 *Пич А.* Операторные идеалы. — М.: Мир, 1982. — 536 с.

10 *Бирман М.Ш., Павлов В.С.* О полной непрерывности некоторых операторов вложения // Вестн. ЛГУ. Сер. Математика,. механика, астрология. — 1961. — № 1. — С. 61–74.

11 *Бирман М.Ш., Соломяк* М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. — 264 с.

12 *Отелбаев М.* Теоремы вложения пространств с весом и их применения к изучению спектра оператора Шредингера // Тр. МИ НА СССР. — 1979. — Т. 150. — С. 265–305.

13 *Отелбаев М.* Критерий совпадения расширений эллиптического оператора, соответствующих задачам Дирихле и Неймана // Матем. заметки. — 1981. — Т. 29. — № 6. — С. 867–875.

14 *Отелбаев М.* Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^n // Тр. МИАН СССР. — 1983. — Т. 163. — С. 195–217.

15 *Похожаев С.И.* Вложение нелинейных операторов и априорные оценки решений нелинейных уравнений // ДАН СССР. — 1982. — Т. 266, № 5. — С. 1063–1066.

16 *Ойнаров Р.* Дуальное неравенство к аддитивной оценке матричного оператора // Тр. междунар.конф. «Современное состояние и перспективы развития математики в рамках программы «Казахстан в третьем тысячелетии». — Алматы, 2001. — С. 111–115.

17 *Oinarov R., Temirkhanova A.M.* Boundedness of *n*-multiple discrete Hardy operators with weighted sequence spaces // Journal of Mathematical Inequalities — 2008. — Vol. 2. — No. 4. — P. 555–570.

18 *Oinarov R., Okroti C.A., Person L. E.* Weighted inequalities of Hardy type for matrix operators: the case $q<p$ // Math. Inequal. Appl. — 2007. — No. 4. — P. 843–861.

19 *Буренков В.И.* Теорема о повторных нормах для пространств Никольского-Бесова и её применение // Тр. МИАН СССР. — 1980. — Т. 181. — С. 27–39.

20 *Бойматов К.Х.* О некоторых весовых пространствах. // Функциональный анализ и его приложения. К теории весовых пространств. — М.: Изд-во МГУ, 1984. — С. 119, 120.

21 *Степанов В.Д.* О весовом неравенстве Харди // Сиб. мат.журн. — 1987. — Т. 28, № 3. — С. 205–207.

22 Функциональный анализ. — М.: Наука, 1972. — С. 32.

23 *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981. — С. 282.

Ш.Білəл, А.Б.Даржанова

Бір үш салмақты Харди типті теңсіздігі жайында

Мақалада Харди жүктелген теңсіздігі орындалуы үшін жүктелген функцияларға қажетті және жеткілікті шарттар дəлелденді жəне ену операторы нормасының сəйкес бағасы алынды. Жүктелген кеңістіктердің енуінің үздіксіздігі мен компактылығы дəлелденді. Ену ықшамдылығы өлшемі берілді. Негізгі теоремаларды дəлелдеуге қажетті леммалар келтірілді.

Sh.Bilal, A.B.Darzhanova

One of three weighted inequality of Hardy

In this article, are given necessary and additional conditions on the weight functions to perform weighted inequality of Hardy type or the corresponding estimate of the norm of the embedding operator. Established continuity and compactness of the embedding of weighted spaces. Are given compactness criterion for investments and some of the fundamental lemma used in the proof of the fundamental theorems.

References

1 Nikolsky S.M. *Approximation of functions of several variables and embedding theorems*, Moscow: Nauka, 1977.

2 Kudryavtsev L.D. *Tr. Steklov,* 1959, 55, p. 1–181.

3 Kufner A., Opitz B. et al. *Dokl.,* 1988, 1, p. 22–26.

4 Lizorkin P.I., Otelbaev M. *Mat. Coll.* 1979, 108, 3, p. 358–377 (4.1); *Mat. Coll.* 1980, 112, 1, p. 56–85 (4.11).

5 Lizorkin P.I., Nikolsky S.M. *Tr. MI USSR,*1983, 161, p. 157–183.

6 Maz'ya V.G. *Sobolev spaces*, Leningrad: Publ. Leningrad State University, 1985.

7 Lions J.L. *Some methods of foreign nonlinear boundary value problems,* Moscow: Mir, 1972, 587 p.

8 Lions J.L. Magenes E. *Nonhomogeneous boundary value problems and their applications*, Moscow: Mir, 1971, 372 p.

9 Pig A. *Operator ideals*, Moscow: Mir, 1982, 536 p.

10 Birman M.Sh., Pavlov V.S. *Vestn. LSU. Mathematics. Mechanics. Astrology,* 1961, 1, p. 61–74.

11 Birman M.Sh., Solonyak M.Z. *Spectral self-adjoint operators,* Leningrad: Leningrad State University, 1980, 264 p.

12 Otelbaev M. *Tr. MI USSR,* 1979, 150, p. 265–305.

13 Otelbaev M. *Md. Notes,* 1981, 29, 6, p. 867–875.

14 Otelbaev M. *Tr. MI USSR*, 1983, 163, p. 195–217.

15 Pokhozhaev S.I. *Dokl.*, 1982, 266, 5, p. 1063–1066.

16 Oinarov R. *Proceedings «Current state and prospects of development of mathematics in the framework of the program «Kazakhstan in the third millennium»»,* Almaty, 2001, p. 111–115.

17 Oinarov R., Temirkhanova A.M. *J.Math. Ineq.,* 2008, 2, 4, p. 555–570.

18 Oinarov R., Okroti C.A., Person L.E. *Math. Inequal. Appl.,* 2007, 4, p. 843–861.

19 Burenkov V.N. *Tr. Mat*., 1980, 181, p. 27–39.

20 Boymatov K.Kh. *On some weighted spaces,* WPC.: Options. analysis and its App. On the theory of weight, Moscow: Publ. MSU, 1984, p. 119, 120.

21 Stepanov V.D. *Sib. Mat.journal,* 1987, 28, 3, p. 205–207.

22 *Functional analysis,* Moscow: Nauka, 1972, p. 32.

23 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis,* Moscow: Nauka, 1981, p. 282.