

Список литературы

- [1] Sandev T., Tomovski Ž., “The general time fractional wave equation for a vibrating string”, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 43:5 (2010), 055204 (12pp).

О ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ СОЛЕНОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Дженалиев М.Т.¹, Ергалиев М.Г.², Иманбердиев К.Б.³, Серик А.М.⁴

^{1,2,3,4} Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

¹ E-mail: muvasharkhan@gmail.com

² E-mail: ergaliev.madi.g@gmail.com

³ E-mail: kanzharbek75ikb@gmail.com

⁴ E-mail: serikakerke00@gmail.com

Для численного решения граничных задач для уравнений Стокса и Навье-Стокса является важным построение системы соленоидальных функций, обладающих свойством фундаментальности. В докладе предлагается один из подходов указанного построения.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d) \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, – открытая ограниченная (односвязная) область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Пространства $W_2^m(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}_2^m(\Omega)$, $m \geq 0$ – целое число.

$$W_2^m(\Omega) = \{v \mid \partial_x^{|\alpha|} v \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m\},$$

$$\overset{\circ}{W}_2^m(\Omega) = \{v \mid v \in W_2^m(\Omega), \partial_{\vec{n}}^j v = 0, j = 0, 1, 2, \dots, m-1\},$$

где

$$\partial_x^{|\alpha|} = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_d}^{\alpha_d}, |\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j, \partial_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j},$$

\vec{n} – внешняя нормаль к $\partial\Omega$.

Постановка спектральной задачи. Пусть $\Omega_1 = \{x_{k0} < x_k < x_{kd}, k = 1, \dots, d\}$ – заданный d -мерный прямоугольный параллелепипед, x_{k0}, x_{kd} , $k = 1, \dots, d$ – заданы. Рассмотрим следующую спектральную задачу для дифференциального оператора четвертого порядка.

$$\sum_{k=1}^d \partial_{x_k}^4 U = \lambda^2(-\Delta)U, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

$$U(x)|_{\partial\Omega} = \partial_{\vec{n}} U(x)|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2)$$

Определение 1 Обозначим через $V_1(\Omega)$ и $V_2(\Omega)$ гильбертовы пространства соответственно со скалярными произведениями

$$(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \quad (3)$$

$$((u, v)) = \sum_{k=1}^d (\partial_{x_k}^2 u, \partial_{x_k}^2 v)_{L^2(\Omega)} \quad \forall u, v \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega). \quad (4)$$

Определение 2 Обозначим через $V_{1k}(0, l)$ и $V_{2k}(0, l)$ гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями

$$(\alpha'(x_k), \beta'(x_k))_{L^2(0,l)} \quad \forall \alpha(x_k), \beta(x_k) \in \overset{\circ}{W}_2^1(0, l), \quad (5)$$

$$((\alpha(x_k), \beta(x_k))) = (\alpha''(x_k), \beta''(x_k))_{L^2(0,l)} \quad \forall \alpha(x_k), \beta(x_k) \in \overset{\circ}{W}_2^2(0, l). \quad (6)$$

Предложение 1 Совокупность "обобщенных собственных функций" спектральной задачи (1)–(2) принадлежит пространству $V_2(\Omega)$ (4) и образует базис в пространстве $V_1(\Omega)$ (3).

Теорема 1 Спектральная задача (1) и (2) имеет следующее решение

$$u_n(x) = \prod_{k=1}^d X_{k,n}(x_k), \quad \lambda_n^2, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

где $X_{k,n}(x_k) = \Phi_n(y)|_{y=x_k}, \quad k = 1, \dots, d:$

$$\begin{cases} \Phi_{2n-1}(y) = \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} y}{2}, \quad \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2(2n-1)\pi}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \Phi_{2n}(y) = [\lambda_{2n} l - \sin \lambda_{2n} l] \sin^2 \frac{\lambda_{2n} y}{2} - \sin^2 \frac{\lambda_{2n} l}{2} [\lambda_{2n} y - \sin \lambda_{2n} y], \\ \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (8)$$

и $\{\nu_n, n \in \mathbb{N}\}$ являются положительными корнями уравнения $\tan \nu = \nu$.

Из теоремы 1 получаем (Figure 1):

Следствие 1 Собственные значения $\{\lambda_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ упорядочены следующим образом

$$0 < \lambda_{2n} = \frac{2\nu_n}{l} < \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lambda_{2n} = \frac{2\nu_n}{l} \rightarrow \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\{\nu_n, n \in \mathbb{N}\}$ являются положительными корнями уравнения $\tan \nu = \nu$.

Теорема 2 Совокупность функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \subset V_2(\Omega)$ (7)–(8) образует полную ортогональную последовательность "обобщенных собственных функций" в пространстве $V_1(\Omega)$.

Предложение 2 Для каждой вектор-функции $\{w_j(x) \in V_1(\Omega), j = 1, \dots, d\}$, удовлетворяющей условию $\operatorname{div} \vec{w}(x) = 0$, существует единственная вектор-функция $\vec{U}(x) \in (V_2(\Omega))^d$. Верно и обратное утверждение.

Об ортогональности системы собственных функций (7)–(8) в пространстве $V_{1j}(0, l)$ (5). Для этой цели найдем производные от собственных функций (8):

$$X_{j,2n-1} = \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} x_j}{2}, \quad j = 1, \dots, d, \quad \lambda_{2n-1}^2 = \left(\frac{2(2n-1)\pi}{l} \right)^2, \quad (9)$$

$$X_{j,2n}(x) = [\lambda_{2n} l - \sin \lambda_{2n} l] \sin^2 \frac{\lambda_{2n} x_j}{2} - \sin^2 \frac{\lambda_{2n} l}{2} [\lambda_{2n} x_j - \sin \lambda_{2n} x_j], \quad j = 1, \dots, d, \quad \lambda_{2n}^2 = \left(\frac{2\nu_n}{l} \right)^2, \quad (10)$$

где ν_n являются положительными корнями уравнения $\tan \nu_n = \nu_n$.

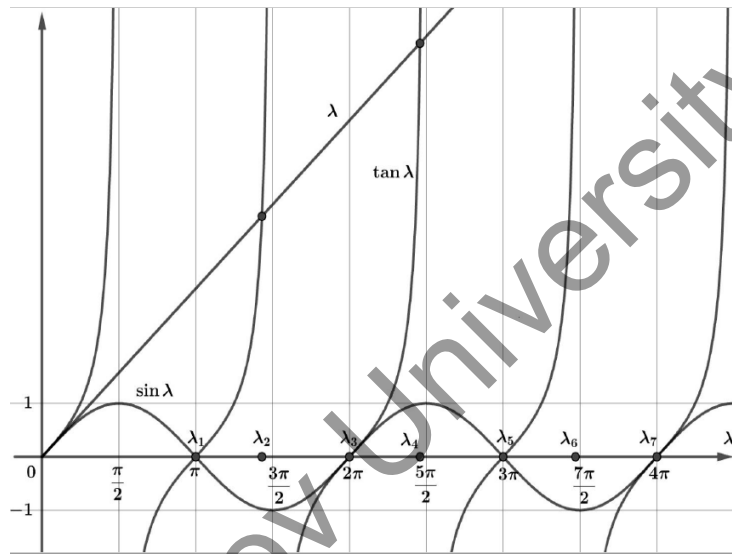


Рис 1: Положительные корни уравнений (при $l = 2$): $\tan \nu_n = \nu_n$, $\nu_n = \frac{\lambda_n l}{2} = \lambda_n$; $\sin \lambda_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Из (9)-(10) имеем

$$X'_{j,2n-1}(x_j) = \frac{\lambda_{2n-1}}{2} \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j), \quad \text{где } \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j) = \sin \lambda_{2n-1} x_j, \quad (11)$$

$$X'_{j,2n}(x_j) = \frac{2}{l} (\nu_n)^3 \cos^2 \nu_n \tilde{X}'_{j,2n}(x_j), \quad \text{где } \tilde{X}'_{j,2n}(x_j) = \nu_n \cdot \sin \frac{2\nu_n}{l} x_j - 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l}. \quad (12)$$

Лемма 1 Пусть $m \neq n$. Справедливы равенства

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j) \tilde{X}'_{j,2m-1}(x_j) dx_j = 0, \quad \int_0^l \tilde{X}'_{j,2n}(x_j) \tilde{X}'_{j,2m}(x_j) dx_j = 0. \quad (13)$$

Лемма 2 Для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int_0^l \tilde{X}'_{j,2n-1}(x_j) \tilde{X}'_{j,2m}(x_j) dx_j = 0. \quad (14)$$

Лемма 3 Частная производная нормированной функции и сама нормированная функция для функции $\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)$ имеют вид:

$$\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_{2n-1} x_j, \quad \|\bar{X}'_{j,2n-1}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = 1, \quad (15)$$

$$\bar{X}_{j,2n-1}(x_j) = \frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi} \sin^2 \frac{(2n-1)\pi x_j}{l}. \quad (16)$$

Лемма 4 Частная производная нормированной функции и сама нормированная функция для функции $\bar{X}_{j,2n}(x)$ имеют вид:

$$\bar{X}'_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{2}{l}} \cdot \frac{1}{\nu_n} \left[\nu_n \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} - 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l} \right], \quad \|\bar{X}'_{j,2n}(x_j)\|_{L^2(0,l)} = 1, \quad (17)$$

$$\bar{X}_{j,2n}(x_j) = \sqrt{\frac{l}{2}} \cdot \frac{1}{\nu_n} \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x_j}{l} - \frac{2}{l} x_j + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_j}{l} \right]. \quad (18)$$

Нормировка функций

$$\partial_{x_j} u_{2n-1}(x) = X'_{j,2n-1}(x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^d X_{k,2n-1}(x_k), \quad \partial_{x_j} u_{2n}(x) = X'_{j,2n}(x_j) \prod_{k=1, k \neq j}^d X_{k,2n}(x_k).$$

Лемма 5 Для случая нечетных $2n-1$ индексов ортонормированная система функций имеет вид:

$$\bar{u}_{2n-1}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi\sqrt{d}} \left(\sqrt{\frac{8}{3l}} \right)^{d-1} \prod_{k=1}^d \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} x_k}{2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (19)$$

Лемма 6 Для случая четных $2n$ индексов ортонормированная система функций имеет вид:

$$\bar{u}_{2n}(x_1, \dots, x_d) = \sqrt{\frac{l}{2d}} \cdot \frac{1}{\nu_n} [K_0(l, \nu_n)]^{-d+1} \cdot \prod_{k=1}^d \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} - \frac{2}{l} x_k + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_k}{l} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (20)$$

где

$$K_0(l, \nu_n) = \frac{\nu_n^3 \sqrt{l} (13\nu_n^4 + 18\nu_n^2 + 13)^{1/2}}{\sqrt{6}(1 + \nu_n^2)^2}.$$

Таким образом, из лемм 1–6 следует, что мы построили ортонормированную систему функций в пространстве $V_1(\Omega)$. Сформулируем полученный результат.

Следствие 2 Спектральная задача (1)–(2) имеет следующее решение

$$\bar{u}_{2n-1}(x_1, \dots, x_d) = \frac{\sqrt{2l}}{(2n-1)\pi\sqrt{d}} \left(\sqrt{\frac{8}{3l}} \right)^{d-1} \prod_{k=1}^d \sin^2 \frac{\lambda_{2n-1} x_k}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

$$\bar{u}_{2n}(x_1, \dots, x_d) = \sqrt{\frac{l}{2d}} \cdot \frac{1}{\nu_n} [K_0(l, \nu_n)]^{-d+1} \cdot \prod_{k=1}^d \left[\frac{1}{\nu_n} \sin \frac{2\nu_n x_k}{l} - \frac{2}{l} x_k + 2 \sin^2 \frac{\nu_n x_k}{l} \right], \quad n \in \mathbb{N}, \quad (22)$$

Причем, системы собственных функций (21)–(??) принадлежит пространству $V_2(\Omega)$ (4) и составляет ортонормированный базис в пространстве $V_1(\Omega)$ (3).

Определение 3 Обозначим через $\mathbf{H}(\Omega)$ пространство соленоидальных функций:

$$\mathbf{H}(\Omega) = \{ \vec{w} \mid \vec{w} \in \mathbf{L}^2(\Omega), \operatorname{div} \vec{w} = 0, \vec{w} \cdot \vec{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}, \quad \mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^d, \quad (23)$$

где $\vec{w} \cdot \vec{n}$ – нормальная составляющая вектора \vec{w} .

Теорема 3 Пусть $d \geq 3$. Тогда совокупность вектор-функций $\vec{w}_n(x) = \{w_{1n}(x), \dots, w_{dn}(x)\}$:

$$\{w_{jn}(x) \in V_1(\Omega), j = 1, \dots, d, n \in \mathbb{N}\}$$

образует фундаментальную систему в пространстве соленоидальных функций $\mathbf{H}(\Omega)$, где $\vec{u}_n(x) = \{u_{1n}(x), \dots, u_{dn}(x)\}$,

$$\vec{w}_n(x) = \operatorname{rot}\{\vec{u}_n(x)\}, \quad \operatorname{div} \vec{w}_n(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

$$\vec{w}_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Теорема 4 Пусть $d = 2$. Тогда совокупность вектор-функций $\vec{w}_n(x) = \{w_{1n}(x), w_{2n}(x)\}$:

$$\{w_{jn}(x) \in V_1(\Omega), j = 1, 2, n \in \mathbb{N}\}$$

образует ортонормированный базис в пространстве соленоидальных функций $\mathbf{H}(\Omega)$, где $\vec{u}_n(x) = \{u_{1n}(x), u_{2n}(x)\}$,

$$\vec{w}_n(x) = \operatorname{rot}\{\vec{u}_n(x)\}, \quad \operatorname{div} \vec{w}_n(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (26)$$

$$\vec{w}_n(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

при этом, в (26) оператор rot определяется согласно формуле

$$\{w_1(x_1, x_2), w_2(x_1, x_2), 0\} = \operatorname{rot}\{0, 0, u(x_1, x_2)\} = \{\partial_{x_2} u, -\partial_{x_1} u, 0\}.$$

Таким образом, используя свойства оператора ротор (для $d \geq 2$), мы строим фундаментальную систему соленоидальных функций. Проводится необходимое обоснование. Результаты могут быть использованы для приближенного решения граничных задач для уравнений Стокса и Навье-Стокса.

Благодарности: Работа финансирована Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант BR20281002).