сти, для каждого конечного n существует структура, имеющая представления только в $non-low_n$ степенях.

Список литературы

1. *Goncharov S.S., Harizanov V.S., Knight J.F. a.o.* Enumerations in computable structure theory // Annals of Pure and Applied Logic. — 2005. — Vol. 136. — № 3. — P. 219–246.
2. *Мальцев А.И.* Конструктивные алгебры. I // Успехи матем. наук. — 1961. — Т. 16. — № 3. — С. 3–60.
3. *Ершов Ю.Л.* Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980. — 416 с.
4. *Тусупов Д.А.* Ориентированный граф конечной Δ_α^0 - размерности // Вестн. НГУ. Сер. матем. — 2007. — Т. 7. — Вып. 1. — С. 104–115.

ӘОЖ 510.67

Л.С.Фазылова, А.Е.Сланбекова

Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университеті

АЛГЕБРАЛЫҚ СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ТҮБІРЛЕРІН АЙЫРУ

Рассмотрены аналитические и графические методы отделения действительных корней нелинейных уравнений, приведены примеры построения графиков нелинейных функций с использованием пакета прикладных программ Matlab.

Present work explains analytic and graphic methods of separating of real solutions of nonlinear equations. Given examples of graphing of nonlinear functions with using applied program Matlab.

Бұл жұмыста

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

теңдеуінің түбірлерін табудың кейбір әдістері берілген. Мұндағы x — нақты немесе комплекс сан; $f(x)$ — осы x аргументіне тәуелді көпмүше немесе трансцендентті функция.

Егер $f(x)$ алгебралық көпмүше болса, онда 5-дәрежелі көпмүшеге дейін ғана $f(x)=0$ теңдеуінің түбірлерін дайын формулалар арқылы есептеуге болатыны белгілі. Ол үшін төмендегі екі мәселені шешу қажет болады [1]:

1) түбірлерді айыру, яғни ішінде тек бір ғана түбір жататын кіші облыстарды анықтау;

2) теңдеудің түбірін берілген дәлдікпен есептеп шығару.

Біз $f(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ түрінде берілген теңдеуді n дәрежелі алгебралық теңдеу, ал

$$f(x) = ax + b\sin x - c = 0,\ f(x) = ae^x + bx - c = 0,\ f(x) = a\lg x + b\sin x - c = 0$$

түрінде, яғни құрамы көрсеткіштік, логарифмдік, тригонометриялық, кері тригонометриялық функциялардан тұратын теңдеулерді трансценденттік теңдеулер дейміз.

Сондықтан көбінесе үш, төрт дәрежелі алгебралық, тригонометриялық, логарифмдік теңдеулерді немесе теңдеулер жүйелерін шешу қажет болады. Жалпы алғанда мұндай есептерді теңдеулердің дәл шешімдерін табу міндетті емес, жуық шешімдері табылса болғаны.

Ал трансценденттік теңдеулердің шешімдерін табудың жалпы әдісі жоқ. Сондықтан көптеген мәселелердің шешуі түптеп келгенде алгебралық немесе трансценденттік теңдеулерді алдын ала берілген дәлдікпен жуықтап шешуге келіп тіреледі.

Теңдеулердің шешімдерін (түбірлерін) жуықтап табудың қандай әдісі болмасын, алдымен олардың нақты түбірлеріне жақын санды (бастапқы мән) табу мәселесін шешпей болмайды.

Түбірлерді айыру тәсілдерін қарастырайық.

Айталық, (1) теңдеуі берілген болсын, мұндағы $f(x)$ функциясы кейбір $a<x<b$ аралығында анықталған және үздіксіз. $x=\xi$ әрбір мағынасында (1) теңдеудің түбірі немесе $f(x)$ функциясының нөлі деп аталады.

(1) теңдеуінің тек оқшауланған нүктелері бар деп алайық, яғни (1)-ң әрбір түбірі үшін басқа түбірге тиісті емес қандай да бір маңайы бар.

Сызықтық емес теңдеулер теориясының негізгі түсініктері мен анықтамаларын келтірейік [2].

Анықтама 1. Теңдеулерден ақиқат түбірлерінің жуық сандарды бастапқы мәндер деп атайды.

Анықтама 2. $f(\xi)=0$ болатындай барлық $x=\xi$ мәндері (1) теңдеудің түбірі, немесе $f(x)$ функциясының нөлі, деп аталады.

Анықтама 3. Егер екі теңдеудің түбірлері тең болса, онда бұл екі теңдеу тепе-тең теңдеулер деп аталады.

Анықтама 4. Егер теңдеудің құрамындағы $f(x)$ функциясы алгебралық (рационал немесе иррационал) болса, онда теңдеу алгебралық деп аталады.

Анықтама 5. Егер теңдеудің құрамындағы $f(x)$ функциясы алгебралық емес болса, онда теңдеу *трансценденттік* деп аталады.

Кейбір жағдайларда трансценденттік теңдеулердің шешімі алгебралық теңдеулердің шешіміне келтіріледі, бірақ көп жағдайда трансценденттік теңдеулер тек жуық түрде шешіледі де, оларды шешу үшін сандық әдістер қолданылады.

Түбірді айыру әдісі математикалық анализдегі келесі теоремаға сүйенеді:

Теорема 1 [2]. Егер үзіліссіз $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде $f(a)f(b)<0$ теңсіздігін қанағаттандырса, онда $f(x)=0$ теңдеуінің (a,b) аралығында ең болмағанда бір түбірі болады.

Ескерту [2]. $\xi\subset(\alpha,\beta)$ түбірі жалғыз болады, егер $f'(x)$ туындысы бар болып және (α,β) аралығында тұрақты белгісін сақтаса және $x\in(\alpha,\beta)$ болғанда $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ болса.

Егер үзіліссіз функцияның $f'(x)$ туындысы бар болса, онда $f'(x)=0$ теңдеуінің түбірі оңай есептелінеді, онда (1) теңдеудің түбірін бөліктеу процесі мына екі кезеңнен тұрады:

1) $f(x)$ функциясының мына $x=a$, $x=b$ шекаралық нүктелерін анықтау;

2) $f(x)$ функциясының нөлдік нүктесін және туындысын, яғни $f'(x)$-ті анықтау.

Мысал 1. $f(x)=x^4-4x-1=0$ теңдеуінің түбірлерін анықтаймыз.

Шешуі. $f'(x)=4(x^3-1)$, $x=1$ нүктесінде $f'(x)=0$ болады. Онда $f(-\infty)>0$, $f(1)=-4<0$, $f(+\infty)>0$ аламыз. Теңдеудің екі нақты түбірі бар, яғни біріншісі $\xi_1\in(-\infty;1)$ аралығында, екіншісі $\xi_2\in(1;+\infty)$ жатады.

$x\in[-2;2]$ кесіндісінде $f(x)=x^4-4x-1$ функциясының графигін алу үшін Matlab пакетінің көмегімен келесі командаларды енгіземіз (графикті *plot* функциясының көмегімен құрамыз) [3]:

```
>> x=[-2:0.1:2];
>> y=x^4–4*x-1;
>> plot(x, y)
```

Теңдеудің бірінші нақты түбірі $\xi_1\in[-1;0]$ аралықта, ал екіншісі $\xi_2\in[1;2]$ аралығында жатады (1-сур.).

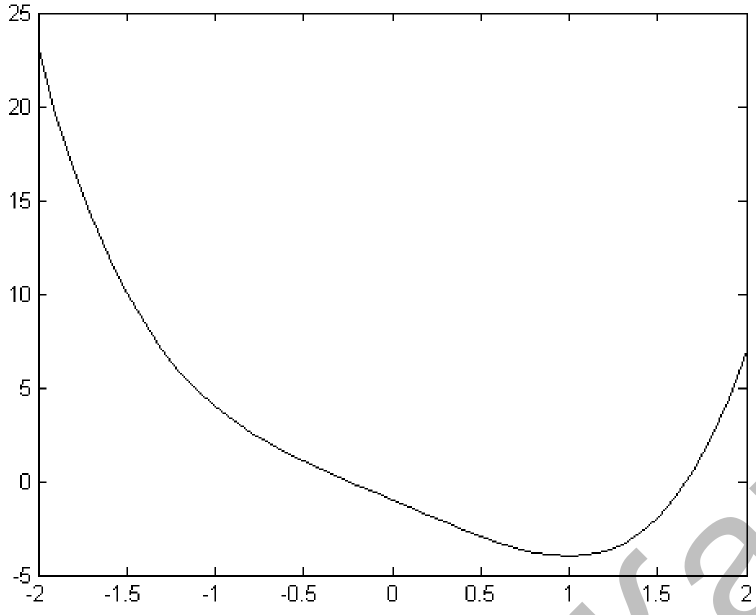
Алгебралық көпмүшеліктің векторлық коэффициенттері Matlab пакетінде берілген [3].

>> *p* = [1 0 0 –4 –1].

Алгебралық көпмүшеліктің Matlab пакетіндегі барлық түбірлері *roots* функциясының көмегімен есептеледі [4].

>> *r* = roots(*p*)
r = 1,6633
–0,7071 + 1,3836*i*
–0,7071 – 1,3836*i*
–0,2490

Түбірлер саны алгебралық көпмүшеліктің дәреже көрсеткішімен сәйкес келеді.



1-сур. 1-мысалдың графикалық шешімі

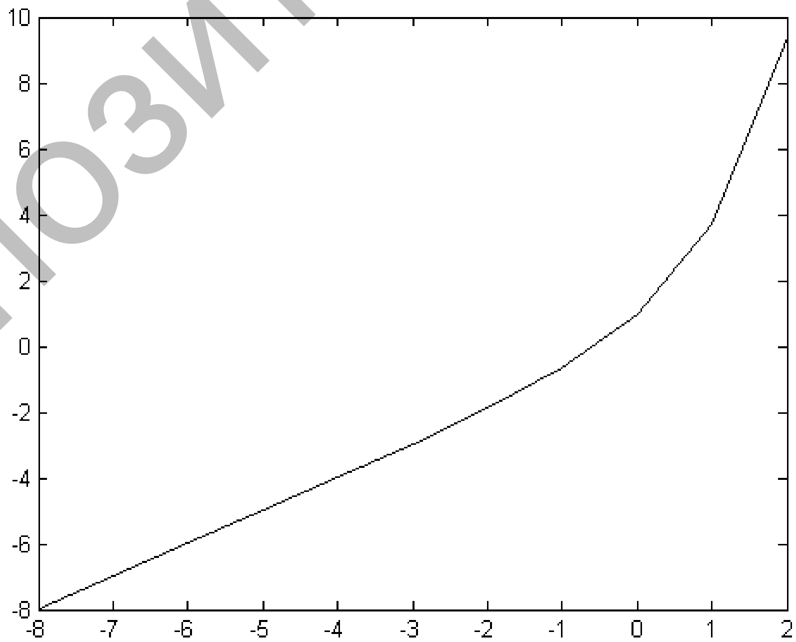
Мысал 2. $f(x) = x + e^x = 0$ теңдеуінің нақты түбірлерін анықтаймыз.

Шешуі. $f'(x) = x + e^x > 0$ және $f\left(-\infty;1\right) = -\infty$, $f\left(+\infty;1\right) = +\infty$ болғандықтан, берілген теңдеудің бір ғана нақты түбірі бар.

$x \in [-8;\, 2]$ кесіндісінде $f(x) = x + e^x = 0$ функциясының графигін Matlab пакетінде құрамыз.

```
>> x = [–8:1:2];
>> y = x + exp(x);
>> plot(x, y)
```

Сонымен, $x \in [-1; 0]$ (2-сур.).



2-сур. 2-мысалдың графикалық шешімі

Енді жуық түбірдің қателігіне анықтама берейік.

Теорема 2. [1] Бізге $[\alpha, \beta]$ кесіндісінде $f(x)=0$ теңдеуінің ξ — нақты, ал $\bar{x}$ жуық түбірі болсын, мұндағы $\alpha \le x \le \beta$ аралығында $|f'(x)| \ge m_1 > 0$. Бұл жағдайда мына теңсіздік орынды:

$$\left|\bar{x}-\xi\right| \le \frac{\left|f(\bar{x})\right|}{m_1}. \qquad (2)$$

Сонымен, $\left|\bar{x}-\xi\right| \le \dfrac{\left|f(\bar{x})\right|}{m_1}$ теорема дәлелденді.

Ескерту. [1] (2) формуланы кез келген жағдайда қолдану қолайсыз болады. Сондықтан практикада қандайда бір әдіспен (α, β) интервалын сығылыстырады. Оның құрамында ξ түбірі және $\bar{x}$ жуық мәні бар және былай тұжырымдалады: $\left|\bar{x}-\xi\right| \le \beta-\alpha$.

Мысал 3. $f(x)=x^4-x-1=0$ теңдеуінің жуық мәні $\bar{x}$ =1,22. Осы түбірдің абсолютті қателігін есептеңіз.

Шешуі. $f(\bar{x})=2,2153-1,22-1=-0,0047$. $\bar{\bar{x}}$ = 1,23 болғанда

$$f(\bar{\bar{x}})=2,2888-1,23-1=+0,0588,$$

онда нақты ξ түбірі (1,22; 1,23) аралығында орналасады. Сондықтан оның осы аралықтағы ең кіші мәні келесі: $m_1=3\cdot 1,22^2-1=3\cdot 1,816=4,448$.

Осыдан (1.2) формула бойынша $\left|\bar{x}-\xi\right| - \le \dfrac{0,0047}{4,448} \approx 0,001.$

Мысал 4. $3^x-2x-5=0$ түбірлерді айыру әдісімен шығарыңыз.

Шешуі. Теңдеуді келесі түрде $f(x)=3^x-2x-5$ жазайық. Туындыны $f'(x)=3^x\ln 3-2$ табамыз.

Туындының түбірін табамыз:

$$3^x-\frac{2}{\lg 3};\ x\lg 3=\lg 2-\lg(\ln 3);\ x=\frac{\lg 2-\lg(\ln 3)}{\lg 3}=\frac{3,975-0,126}{0,4567}=0,84.$$

$f(x)$ функциясының мәндер кестесін құрамыз:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
sign $f(x)$	–	–	+

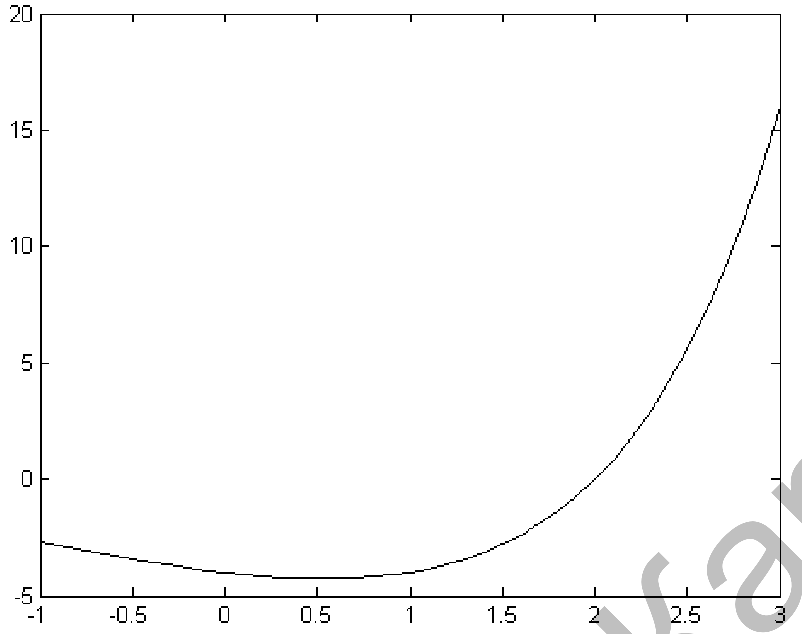
Түбірлері бар аралықтарды кішірейтейік.

x	–1	0	1	2
sign $f(x)$	–	–-	–-	+

$$f(-1)=\frac{1}{3}+2-5=-2,67;\ f(0)=1-5=-4;$$
$$f(1)=3-2-5=-4;\ f(2)=9-4-5=0.$$

$f(x)$ функциясының графигін Matlab пакетінде құрамыз [3].

>> *x* = [–1:0.1:3];
>> *f* = 3.^*x*–2.**x*–5;
>> plot(*x*, *y*)
Сонымен, $x \in [1;2]$ (3-сур.).

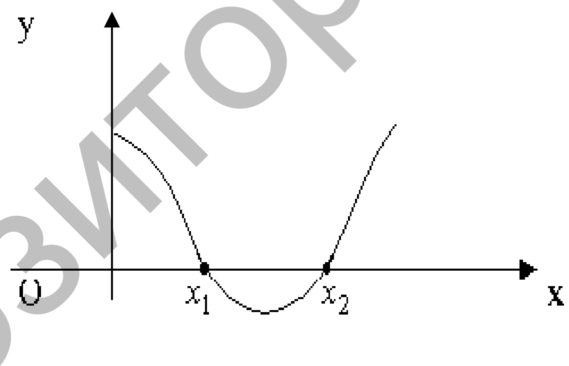


3-сур. 4-мысалдың графикалық шешімі

Түбірлерді айырудың графикалық тәсіліне тоқталайық.

$f(x)=0$ теңдеуінің бастапқы мәндерін табудың бір жолы $y=f(x)$ функциясының графигін сызу арқылы, осы функцияның Ox осімен қиылысу нүктелерін тауып, оларды теңдеудің жуық түбірлері ретінде қолдану.

Мысал 5. $y=f(x)$ функциясының графигі 4-суреттегідей болсын.



4-сур. 5-мысалдың графикалық шешімі

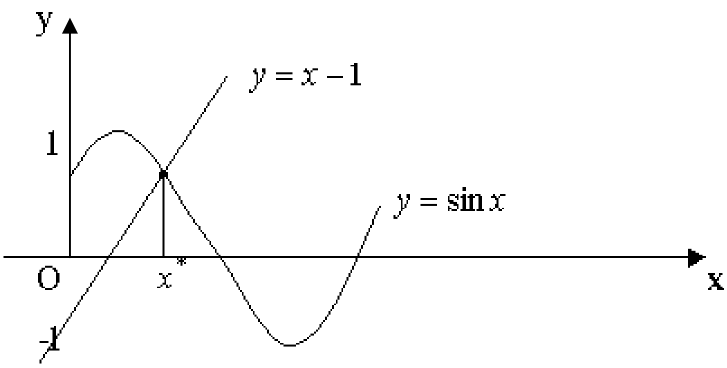
Онда x_1, x_2 нүктелерінің біреуін бастапқы мән ретінде алуға болады.

Егер $y=f(x)$ функциясын, екі функцияның айырымы немесе қосындысы түрінде жазуға болатын болса, яғни $f(x)=\phi(x)-g(x)$ болса, онда $f(x)=0$ теңдеуін $\phi(x)=g(x)$ түрінде жазып, $y=\phi(x)$, $y=g(x)$ функцияларының графиктерінің қиылысу нүктелерін бастапқы мән ретінде аламыз [2].

Мысал 6. $\sin x - x + 1 = 0$ теңдеуін қарастырсақ, оны $\sin x = x - 1$ түрінде жазамыз да $y=\sin x$, $y=x-1$ функцияларының графигін саламыз (5-сур.).

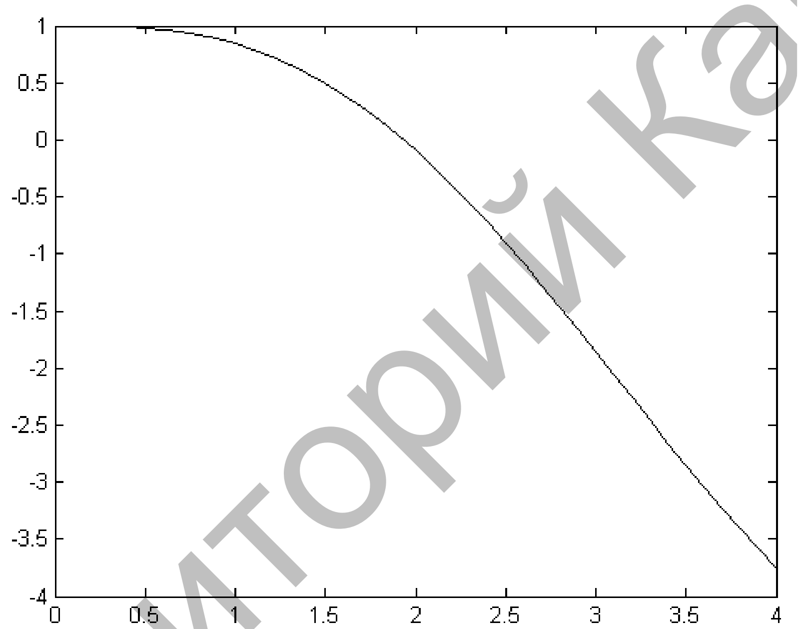
$f(x)=\sin x - x + 1$ функциясының графигін Matlab пакетінде құрамыз [3].

```
>> x = [0:0.1:4];
>> f = sin(x)–x+1;
>> plot(x, z)
```



5-сур. 6-мысалдың графикалық шешімі

Бастапқы мән ретінде $[1, \pi]$ аралығында жатқан x^* нүктесін аламыз (6-сур.).



6-сур. 6-мысалдың Matlab пакетіндегі графикалық шешімі

Ескерту. [1] Графиктік әдістер өте қолайлы және басқаларға қарағанда қарапайым, бірақ олар тек түбірді дөрекі анықтағанда ғана қолданылады.

Мысал 7. $(x+1)\cos x = 1$ теңдеудің түбірін графикалық жолмен айырыңыз.

Теңдеуді келесі түрде жазайық $\cos x = 1/(x+3)$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = 1/(x+3)$ деп белгілеп, осы функциялардың графиктерін салайық (7-сур.).

Графиктен теңдеудің екі нақты түбірі $x_1 \approx -1{,}1; x_2 \approx 1{,}3$ бар екені көрініп тұр.

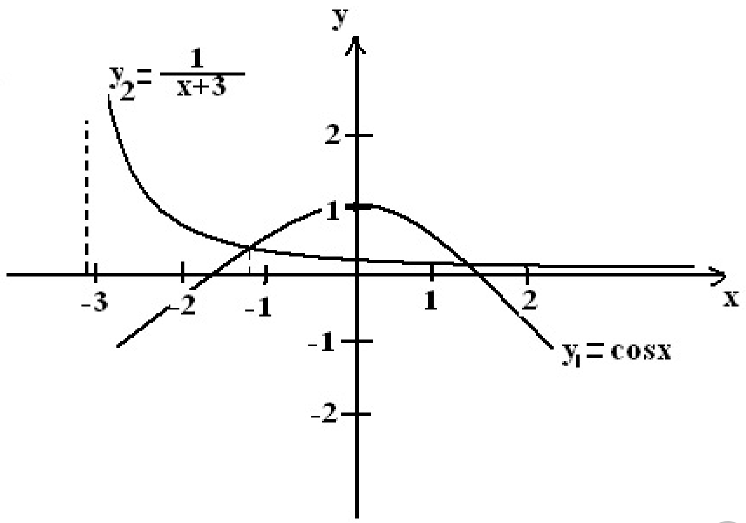
$f(x) = (x+1)\cos x - 1$ функциясының графигін Matlab пакетінде құрамыз [3].

>> x = [–2:0.1:2];

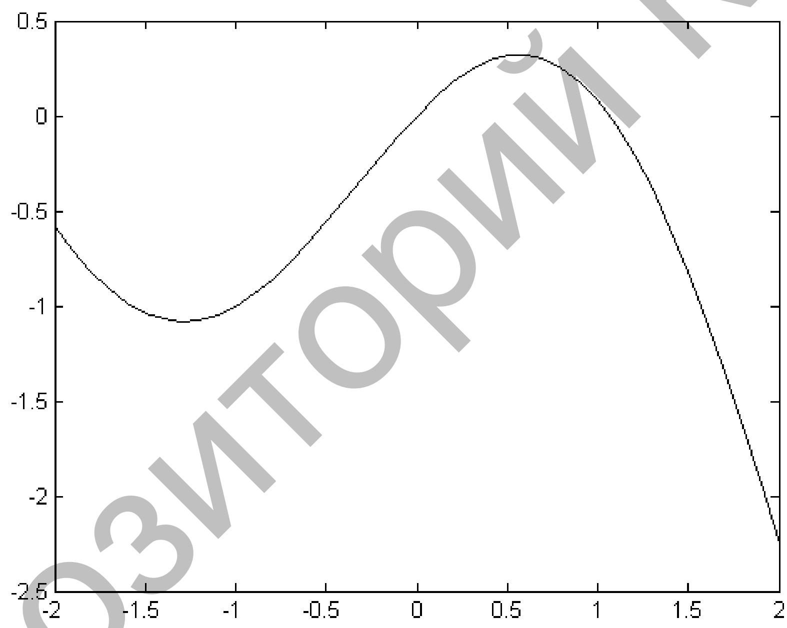
>> f = (x+1).*cos(x)-1;

>> plot(x, f).

$(x+1)\cos x = 1$ теңдеудің бірінші нақты түбірі $\xi_1 \in [-0{,}5;\ 0{,}5]$ аралығында, екіншісі $\xi_2 \in [1; 2]$ аралығында жатады (8-сур.).



7-сур. 7-мысалдың графикалық шешімі



8-сур. 7-мысалдың Matlab пакетіндегі графикалық шешімі

Әдістердің есептеу сызбасын іске асыру кезінде Matlab ортасының графикалық мүмкіндіктерін қолдануға өте пайдалы болады.

Әдебиеттер тізімі

1. *Пантелеев А.В., Киреев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 2004. — 480 с.
2. *Демидович Б.П., Марон И.А.* Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1966. — 784 с.
3. *Мансурова М.Е., Дуйсебекова К.С.* Решение прикладных задач в среде Matlab: Учеб. пособие. — Алматы: Қазақ ун-ті, 2004. — 108 б.
4. *Джон Д. Мэтьюз, Куртис Д. Финк.* Численные методы. Использование Matlab: Пер. с англ. — 3-е изд. — М.: Изд. дом «Вильямс», 2001. — 720 с.