УДК 519.688

К.Т. Искаков, А.Т. Кусаинова, З.Т. Хасенова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана, Казахстан
(E-mail: kazizat@mail.ru)

Алгоритм численного решения многомерной обратной задачи электродинамики

В статье рассмотрена обратная коэффициентная задача для многомерного уравнения электродинамики в линейном приближении. Для решения коэффициентной обратной задачи по определению проводимости среды, зависящей от двух переменных, использован оптимизационный метод. Получена формула для вычисления градиента функционала. Сформулированы соответствующие сопряженные задачи.

Ключевые слова: обратная задача, уравнение электродинамики, сопряженная задача, оптимизационный метод, проводимость среды, диэлектрическая проницаемость, магнитная проницаемость, уравнение Максвелла, линеаризация.

1 Линейное приближение обратной задачи

Распространение электромагнитных волн описывается системой уравнений Максвелла [1]

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t} - rot\overrightarrow{H} + \sigma\overrightarrow{E} + \overrightarrow{j}^{cm} = 0, \;\; x_3 \neq 0, x \in \Re; \\ \mu\frac{\partial\overrightarrow{H}}{\partial t} + rot\,\overrightarrow{E} = 0, \; \mathrm{t} \; > \; 0. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\overrightarrow{E} = (E_1, E_2, E_3)^T, \overrightarrow{H} = (H_1, H_2, H_3)^T$ — векторы напряженности электрического и магнитного полей; ε,μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; σ — проводимость среды; $\overrightarrow{j}^{cm}$ — плотность сторонних токов.

Зададим начальные условия

$$(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{H})\Big|_{t<0} = 0; \qquad \overrightarrow{\mathrm{j}}^{cm}\Big|_{t<0} = 0. \tag{2}$$

Тангенционные компоненты векторов $\overrightarrow{E}$, $\overrightarrow{H}$ удовлетворяют условиям непрерывности

$$(E_j|_{x_3=-0} = E_j|_{x_3=+0}\,; \quad H_j|_{x_3=-0} = H_j|_{x_3=+0}\,, \quad j = 1,\ 2. \tag{3}$$

Для определения коэффициента $\sigma(x_1, x_2)$ зададим дополнительную информацию (отклик среды)

$$E_j|_{x_3=0} = \chi_j(x_1, x_2, t); \quad H_j|_{x_3=0} = \eta_j(x_1, x_2, t); \quad j = 1, 2. \tag{4}$$

Пусть коэффициент проводимости среды представим в виде

$$\sigma(x_1, x_2) = \sigma_0(x_3) + \sigma_1(x_1, x_3). \tag{5}$$

Предположим, что коэффициенты $\sigma_1(x_1, x_3)$ малы относительно коэффициента $\sigma_0(x_3)$, тогда возможно использовать метод линеаризации [2].

Представим векторы электрической и магнитной напряженностей в виде

$$\overrightarrow{E} = E^0 + E^1, \;\; \overrightarrow{H} = H^0 + H^1, \tag{6}$$

где (E^0, H^0) — решение задачи (7). Здесь и в дальнейшем считаем, что $\overrightarrow{E}^0 = E^0$; $\overrightarrow{H}^0 = H^0$; $\overrightarrow{E}^1 = E^1$; $\overrightarrow{H}^1 = H^1$; $\overrightarrow{j}^{cm} = j^{cm}$; тогда

$$\begin{cases} \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}E^0 - rotH^0 + \sigma_0 E^0 + j^{cm} = 0; \\ \mu\frac{\partial}{\partial t}H^0 + rotE^0 = 0; \\ (E_0, H_0)_{|t<0} = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Пренебрегая величиной $\sigma_1 E^1$, получим для (E^1, H^1), следующую задачу:

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}E^1 - rotH^1 + \sigma_0 E^1 = -\sigma_1 E^0; \\ \mu\frac{\partial}{\partial t}H^1 + rotE^1 = 0; \\ (E^1, H^1)_{|t<0} = 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

На плоскости $x_3 = 0$ тангенциальные компоненты векторов (E^0, H^0), (E^1, H^1) удовлетворяют условиям

$$[E_j^0]_{x_3=0} = [H_j^0]_{x_3=0} = 0; \quad [E_j^1]_{x_3=0} = [H_j^1]_{x_3=0} = 0. \tag{9}$$

Дополнительная информация (4) примет вид

$$\left(E^1\right)_j\Big|_{x_3=0} = \chi_j^1(\overline{x}, t); \quad \left(H^1\right)_{j|_{x_3=0}} = \eta_j^1(\overline{x}, t), \quad j = 1, 2, \ \ \overline{\mathrm{x}}= (\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2). \tag{10}$$

Здесь

$$\chi_j^1 = \chi_j - E_j^0\big|_{x_3=0}, \ \ \eta_j^1 = \eta_j - H_j^0\big|_{x_3=0}, \quad j = 1, 2. \tag{11}$$

Пусть функции $\sigma_0(x_3)$, $\sigma_1(x_1, x_3)$ удовлетворяют условиям:

1. $\sigma_0 \in C^2(\Re)$.

2. Существуют M_1,M_2,$M_3 \in \Re$ такие, что при всех $x_3 \in \Re$ имеет место неравенства

$$0 < M_1 \le \sigma_0(x_3) \le M_2, \quad \|\sigma_0\|_{C^2(\Re)} \le M_3.$$

3. Функция $\sigma_1(x_1, x_3)$ отлична от нуля в области $(x_1, x_3) \in (0, h) \times K(D_1)$,

$$K(D_1) = \{x_1 \in \Re; |x_j| < D_1, j = 1, 3\},$$

где h, $D_1 \in \Re_T$ — фиксированные числа.

4. $\sigma_1(x_1 x_3) \in C^2((0, h) * K(D_1))$, $\alpha = \|\sigma_1\|\, C^2((0, h) * K(D_1)) \le M_1$.

На основании этих условий и предположения (5) минимальное время, за которое возмущение достигнет глубины h при всех $x_1 \in \Re$ и вернется на поверхность $x_3 = 0$, равно $T_h = 2h/(M_1 - \alpha)$.

В силу этого имеет место следующее граничное условие:

$$E_j^0\big|_{x_1=\pm D_1} = 0. \tag{12}$$

В связи с тем, что коэффициент $\sigma_0(x_3)$ зависит от одной переменной x_3, достаточно задать одну горизонтальную компоненту

$$E_2^0\big|_{x_3=0} = f_{(1)}(x_1, t). \tag{13}$$

Выпишем условие для компоненты H_1^0. Для этого, полагая условия (13) как граничные условия в области $x_3 < 0$, где $\sigma = 0$, а $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, и решив систему (7), определим вектор H^0, тем самым будет известно условие

$$\mathrm{H}^0\big|_{x_3=0} = f_{(2)}(x_1, t). \tag{14}$$

Таким образом, общий алгоритм решения обратной задачи в линейном приближении состоит из следующих шагов:

1. В плоскости $x_3 < 0$ (в воздухе), в котором известны $\sigma = 0$, $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, решив задачу (1), находим (E, H). Используем при этом дополнительную информацию (10), (13), (14) применяются как граничные условия.

2. Далее вычисляем граничные условия

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{H}_1\big|_{x_3=0} = f_2(x_1, t); \\ (\mathrm{H}^1)_{j|_{x_3=0}} = \eta_j^1(\bar{x}, t); \quad j = 1, 2; \\ (\mathrm{H}_j^0)_{|x_3=0}, j = 1, 2. \end{array}\right. \tag{15}$$

3. В плоскости $x_3 \ge 0$ решаем обратную задачу об определении $\sigma_0(x_3)$, Полагаем, что $E(x_3)$ в $x_3 \ge 0$ известны, а $\mu = 1$.

Зададим граничное условие

$$\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mathrm{E}_2}{\partial x_3}\right)\Big|_{x_3=0}=\frac{\partial}{\partial\, t}f_2(x_1,t). \tag{16}$$

4. Определяем правую часть системы (8), т.е. вычислим $\sigma_1 E^0$.

5. Определяем дополнительную информацию (10).

6. Используем метод наискорейшего спуска для определения коэффициента $\sigma_1(x_1,x_3)$ как решение системы (8).

2 Алгоритм решения обратной задачи об определении $\sigma_1(x_1,x_3)$

Пусть $p(\overline{x})$ — приближенное решение обратной задачи, где обозначено $\overrightarrow{x}=(x_1,x_3)$.

Введем функционал

$$\left\{\begin{array}{l} J(p(\overline{x}))=\int_0^T\left(\sum_{j=1}^2\left[\mathrm{E}_j^1(\overline{x},0,t;p)-\chi_j^1(\overline{x},t)\right]^2 d\,t\right)+\\ +\int_0^T\left(\sum_{j=1}^2\left[\mathrm{H}_j^1(\overline{x},0,t,p)-\eta_j^1(\overline{x},t)\right]^2 d\,t\right). \end{array}\right. \tag{17}$$

Формулу для вычисления градиента функционала (17) получим по аналогии с изложенной в [3]:

$$J(p)=\int_0^T\int_{-D_2}^{D_2}(E^0)\varphi(\overline{x},x_2,t)dx_2dt, \tag{18}$$

где ϕ, ψ — решения соответствующих задач.

Покажем это, зададим приращение $p(\overline{x})+\delta p(\overline{x})$, тогда $\delta\,\mathrm{E}^1=\mathrm{E}^1(\overline{x},x_3,t;p+\delta p)-\mathrm{E}^1(\overline{x},x_3,t;p)$; $\delta\,\mathrm{H}^1=\mathrm{H}^1(\overline{x},x_3,t;p+\delta p)-H^1(\overline{x},x_3,t;p)$. Пренебрегая членом второго порядка, получим следующую систему:

$$\left\{\begin{array}{c} \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta E^1-rot\delta H^1+\sigma_0\delta E^1=-p\sigma E^0-E^0\sigma p,;\\ \mu\frac{\partial}{\partial t}\delta H^1+rot\delta E^1=0. \end{array}\right. \tag{19}$$

Обе части системы (19) умножим скалярно на вектор $\psi=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$. $\left\langle\mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\,\mathrm{H}^1,\psi\right\rangle+\left\langle rot\,\delta\,\mathrm{E}^1,\psi\right\rangle=0$.

Распишем покомпонентно вторую подсистему системы (19):

$$\left\{\begin{array}{l} \mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathrm{H}_1^1\,\psi_1+\left(\frac{\partial}{\partial\,x_2}\delta\mathrm{E}_3^1-\frac{\partial}{\partial\,x_3}\delta\mathrm{E}_2^1\right)\psi_1=0;\\ \mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathrm{H}_2^1\,\psi_2+\left(\frac{\partial}{\partial\,x_1}\delta\mathrm{E}_3^1-\frac{\partial}{\partial\,x_3}\delta\mathrm{E}_1^1\right)\psi_2=0;\\ \mu\frac{\partial}{\partial t}\delta\mathrm{H}_3^1\,\psi_3+\left(\frac{\partial}{\partial\,x_1}\delta\mathrm{E}_2^1-\frac{\partial}{\partial\,x_2}\delta\mathrm{E}_1^1\right)\psi_3=0. \end{array}\right. \tag{20}$$

Распишем покомпонентно первую подсистему системы (19):

$$\left\{\begin{array}{l} \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta E_1^1\psi_1-(\frac{\partial}{\partial x_2}\delta H_3^1-\frac{\partial}{\partial x_3}\delta H_2^1)\psi_1+\sigma_0\delta E_1^1\psi_1=-p\delta E_1^0\psi_1-\delta pE_1^0\psi_1;\\ \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta E_2^1\psi_2-(\frac{\partial}{\partial x_1}\delta H_3^1-\frac{\partial}{\partial x_3}\delta H_1^1)\psi_2+\sigma_0\delta E_2^1\psi_2=-p\delta E_2^0\psi_2-\delta pE_2^0\psi_2;\\ \varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\delta E_3^1\psi_3-(\frac{\partial}{\partial x_1}\delta H_2^1-\frac{\partial}{\partial x_2}\delta H_1^1)\psi_3+\sigma_0\delta E_3^1\psi_3=-p\delta E_3^0\psi_3-\delta pE_3^0\psi_3. \end{array}\right. \tag{21}$$

Проинтегрируем обе части каждого уравнения системы (20) в области $t\in(0,T_h),\overline{x}\in\Gamma D$, отсюда имеем

$$J^{(1)}=\int_0^T\int_{\overline{x}\in D}\left[\mu\left(\frac{\partial}{\partial\,t}\delta\mathrm{H}_1^1\right)\psi_1+\left(\frac{\partial}{\partial\,x_2}\delta\mathrm{E}_3^1-\frac{\partial}{\partial\,x_3}\delta\mathrm{E}_2^1\right)\psi_1\right]d\overline{x}d\,t=$$

$$=\int_{\overline{x}\in D}\left[\mu\,\delta\mathrm{H}_1^1\psi_1\big|_0^T-\int_0^T\delta\mathrm{H}_1^1\frac{\partial}{\partial,t}\psi_1 d\,t\right]d\overline{x}+$$

$$+\int_0^T\left[\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_3}^{D_3}\int_{-D_2}^{D_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\delta\mathrm{E}_3^1\psi_1 d\,x_2d\,x_3d\,x_1-\int_{-D_1}^{D_1}\int_{-D_3}^{D_3}\int_{-D_2}^{D_2}\frac{\partial}{\partial\,x_3}\delta\mathrm{E}_2^1\psi_1 d\,x_3d\,x_2d\,x_1\right]d\,t= \tag{22}$$

$$= J_1 + \int_0^T \left[\int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_3}^{D_3} \left\{ \delta \mathrm{E}_3^1 \psi_1 \big|_{-D_2}^{D_2} - \int_{-D_2}^{D_2} \delta \mathrm{E}_3^1 \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_1 d\, x_2 \right\} d\, x_3 d\, x_1 \right] d\, t -$$

$$- \int_0^T \left[\int_{-D_1}^{D_1} \int_{-D_2}^{D_2} \left\{ \delta \mathrm{E}_2^1 \psi_1 \big|_{-D_3}^{D_3} - \int_{-D_3}^{D_3} \delta \mathrm{E}_2^1 \frac{\partial}{\partial x_3} \psi_1 d\, x_3 \right\} d\, x_2 d\, x_1 \right] d\, t.$$

Обозначим первый интеграл через J_1. Предположим, что

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, T) = 0; \tag{23}$$

$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_2 = \pm D_2} = 0;$$
$$\psi_1(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_3 = \pm D_3} = 0. \tag{24}$$

Граничное и начальное условия для системы (19) имеют вид

$$\delta\, \mathrm{E}^1\big|_{x = \Gamma D} = 0; \tag{25}$$

$$(\delta \mathrm{E}^1, \delta \mathrm{H}^1)_{|t=0} = 0. \tag{26}$$

Где ΓD — граница области $D = D_{\pm 1} \times D_{\pm 2} \times D_{\pm 3}$. Далее, с учетом условий (25), (26) и принятых условий (23), (26), в соотношении (22), для J^1 останутся

$$J^1 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_1^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_1 \right) - \delta \mathrm{E}_3^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_1 \right) + \delta \mathrm{E}_2^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_1 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0. \tag{27}$$

Проинтегрировав по частям второе и третье уравнения системы (20) с условиями (25), (26) и предполагая, что

$$\psi_j(x_1, x_2, x_3, T) = 0, j = 2, 3;$$
$$\psi_j(x_1, x_2, x_3, t)\big|_{x_k = \pm D_k} = 0, j = 2, 3; k = 1, 2, 3; \tag{28}$$

имеем

$$J^2 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_2^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) + \delta \mathrm{E}_3^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_2 \right) - \delta \mathrm{E}_1^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_2 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0; \tag{29}$$

$$J^3 = \int_0^T \int_{\overline{x} \in D} \left[-\delta \mathrm{H}_3^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi\ \ 3 \right) - \delta \mathrm{E}_2^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_3 \right) + \delta \mathrm{E}_1^1 \left(\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_3 \right) \right] d\, \overline{x} d\, t = 0. \tag{30}$$

Из соотношений (27), (29), (30) имеем

$$-\delta \mathrm{H}_1^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_1 \right) - \delta \mathrm{H}_2^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) - \delta \mathrm{H}_3^1 \left(\mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi_2 \right) +$$

$$+ \delta \mathrm{E}_3^1 \left[\frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_2 - \frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_1 \right] - \delta \mathrm{E}_2^1 \left[-\frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_1 + \frac{\partial}{\partial\, x_1} \psi_3 \right] + \delta \mathrm{E}_1^1 \left[\frac{\partial}{\partial\, x_2} \psi_3 - \frac{\partial}{\partial\, x_3} \psi_2 \right] = 0. \tag{31}$$

Из (31) вытекает, что

$$- \left\langle \delta \mathrm{H}^1, \mu \frac{\partial}{\partial\, t} \psi \right\rangle + \left\langle \delta \mathrm{E}^1, rot \psi \right\rangle = 0; \tag{32}$$

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \psi + rot \psi = 0. \tag{33}$$

По аналогии проведем аналогичные выкладки с первым уравнением системы (22), т.е. рассмотрим соотношение

$$\left\langle \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \delta E^1, \psi \right\rangle - \left\langle rot\, \delta\, H^1, \psi \right\rangle + \left\langle \sigma_0 \delta E^1, \psi \right\rangle = - \left\langle p E^0, \psi \right\rangle - \left\langle \delta p E^0, \psi \right\rangle, \tag{34}$$

где $\psi = (\psi_1, \psi_2, \psi_3)$.

Как и в предыдущем случае, получим

$$-\left\langle \delta E^1, \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\psi \right\rangle - \left\langle \delta_0 H^1, rot\psi \right\rangle + \left\langle \delta_0 E^1, \sigma\psi \right\rangle = -\left\langle E^1, p\psi \right\rangle - \left\langle \delta p E^0, \psi \right\rangle. \quad (35)$$

Объединив равенства (32), (35), окончательно получим постановки сопряженных задач

$$\begin{cases} -\mu\frac{\partial}{\partial t}\psi + rot\varphi = p\frac{\partial}{\partial t}\varphi; \\ -\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\varphi - rot\varphi + \sigma_0\varphi = -\sigma_1 E^0; \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{array}{l} \psi_j(x_1,x_2,x_3,T) = 0, \quad j = 2,3; \\ \psi_j(x_1,x_2,x_3,t)|_{x_k=\pm D_k} = 0, \quad j = 2,3; k = 1,2,3; \\ \phi_j(x_1,x_2,x_3,T) = 0, \quad j = 2,3; \\ \phi_j(x_1,x_2,x_3,t)|_{x_k=\pm D_k} = 0, \quad j = 2,3; k = 1,2,3; \end{array} \quad (37)$$

$$(\psi_j)_{x_3|x_3=0} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{H}_j^1(\overline{x},0,t,p) - \eta_{j1}(\overline{x},t)\right];$$

$$(\phi_j)_{x_3|x_3=0} = 2\sum_{j=1}^{2}\left[\mathrm{E}_j^1(\overline{x},0,t,p) - \chi_{j1}(\overline{x},t)\right]. \quad (38)$$

Таким образом, мы получили алгоритм решения обратной задачи об определении $\sigma_1(x_1,x_3)$. Алгоритм определения диэлектрической проницаемости оптимизационным методом для задачи (1) в линеаризованной постановке изложен в работе [4].

Работа поддержана грантом МОН РК по договору № 266 от 09.03.2017 г.

Список литературы

1 Романов В.Г. Обратные задачи математической физики / В.Г.Романов. — М.: Наука, 1984. — 264 с.

2 Романов В.Г. Обратные задачи геоэлектрики / В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. — М.: Наука, 1991. — 303 с.

3 Романов В. Г. Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач / В.Г.Романов, С.И.Кабанихин. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 2001. — 316 с.

4 Искаков К.Т. Оптимизационный метод решения обратной задачи электродинамики в линеаризованной постановке / К.Т.Искаков, А.Т.Кусаинова // Вестн. Караганд. ун-та. Серия математика. — 2014. — № 4(76). — С. 42–49.

Қ.Т. Искаков, А.Т. Кусаинова, З.Т. Хасенова

Электрдинамиканың көпөлшемді кері есебін сандық шешу алгоритмі

Мақалада сызықтық жуықтаудағы электрдинамиканың көпөлшемді теңдеу үшін кері коэффициенттік есеп қарастырылды. Екі айнымалыға тәуелді орта өткізгіштігін анықтау бойынша кері коэффициенттік есепті шешу үшін оңтайландыру әдісі қолданылды. Функционал градиентін есептеуге формула алынды. Сәйкесінше түйіндес есептер тұжырымдалды.

Кілт сөздер: кері есептер, электрдинамика теңдеуі, түйіндес есептер, тиімді әдіс, орта өткізгіштігі, диэлектрлік өтімділік, магниттік өтімділік, Максвелл теңдеуі, линеаризациялау.

K.T. Iskakov, A.T. Kussainova, Z.T. Khassenova

Algorithm of the numerical solution of the multidimensional inverse problem of electrodynamics

In this article, we consider the inverse coefficient problem for the multidimensional equation of electrodynamics in the linear approximation. To solve the coefficient inverse problem for determining the conductivity of a medium that depends on two variables, an optimization method is used. A formula is obtained for calculating the gradient of the functional. The corresponding conjugate problems are formulated.

Keywords: Inverse problem, electrodynamic equation, conjugate problem, optimization method, medium conductivity, dielectric constant, magnetic permeability, Maxwell equation, linearization.

References

1 Romanov, V.G. (1984). *Obratnye zadachi matematicheskoi fiziki [Inverse problems of mathematical physics].* Moscow: Nauka [in Russian].

2 Romanov, V.G. & Kabanihin, S.I. (1991). *Obratnye zadachi heoelektriki [Inverse problems of geoelectric].* Moscow: Nauka [in Russian].

3 Romanov, V.G. & Kabanihin, S.I. (2001). *Optimizatsionnye metody resheniia koeffitsientnykh obratnykh zadach [Optimization methods for solving inverse problems].* Novosibirsk: Izdatelstvo NSU [in Russian].

4 Iskakov, K.T. & Kussainova, A.T. (2014). Optimizatsionnyi metod resheniia obratnoi zadachi elektrodinamiki v linearizovannoi postanovke [Optimization method for solving the inverse problem of electrodynamics in a linearized formulation]. *Vestnik Karahandinskoho Universiteta. Seriia matematika – Bulletin of Karaganda University, Mathematics Series, 4(76),* 42–49 [in Russian].