References

1 Chaimark M.A. *Linear differential operators*, Moscow: Nauka, 1969, p. 352.

2 Shkalikov A.A. *On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions*, Moscow: State University Bull. Mat. and Mech., 1982, 6, p. 12–21.

3 Makin A.S. *Differential Equations*, 2006, 42, 4, p. 560–562.

4 Sadybekov M.A., Imanbayev N.S. *Differential equations*, 2012, 48, 6, p. 896–900.

5 Khardi G.G., Lyttlvud D.E., Polia G. *Inequalities*, Moscow: VK, 1948, p. 240.

6 *Function analysis* / Ed. S.G.Crane, Moscow: Mir, 1972, p. 66.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;
РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда (E-mail: modth1705@mail.ru)

Стабильностные свойства компаньонов позитивных йонсоновских теорий

В статье рассмотрен позитивный аналог конечного α -форсинга для $\Delta - M$-теории. Показана эквивалентность стабильности центрального типа такой теории форсинг-компаньоном при условии совершенности и позитивной экзистенциальной полноты. При изучении стабильностных свойств теорий важную роль играет понятие форкинга, введенное С.Шелахом при изучении спектральных вопросов полных теорий. Йонсоновские теории, вообще говоря, неполны. Автором статьи приведены некоторые результаты относительно аксиоматического задания форкинга на случай $\Delta - M$ -теорий, которые являются позитивным обобщением йонсоновских теорий. Также рассмотрены понятие центрального типа при некотором обогащении сигнатуры и связь центрального типа с самой теорией. С помощью синтаксического подобия выявлены инвариантные относительно семантического подобия некоторые стабильностные свойства в классе $\Delta - M$ -теорий.

Ключевые слова: йонсоновская теория, экзистенциально замкнутая модель, форкинг, центральный тип, синтаксическое и семантическое подобие йонсоновских теорий.

Основной целью данной работы является дать основные понятия и результаты в связи с понятием конечного форсинга Робинсона [1, 2] для позитивных йонсоновских теорий. Все основные сведения о позитивных йонсоновских теориях можно найти в [3].

Напомним, как строятся базисные множества для произвольных счетных теорий с помощью некоторого обобщения в смысле кванторов конечного форсинга Робинсона в [3, 4]. В связи с результатами работы [5] мы можем с помощью позитивной морлизации указанные выше понятия свести к $B^+(At)$. Существенным является то, что во всех определениях, касающихся как моделей, так и формул, мы будем иметь дело в качестве морфизмов лишь с погружениями. В [6] был введен класс теорий, который в пересечении с классом йонсоновских теорий обобщает его, а также содержит обобщенные йонсоновские теории, введенные в [4]. Интересно рассмотреть связь форсинга для таких классов теорий, когда мы рассматриваем только погружения. Напомним определение этого класса.

Определение 1. Теория T называется Δ -позитивно мустафинской (Δ - PM)-теорией, если:

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π^+_{n+2} -аксиоматизируемой;

3) теория T допускает Δ - JEP;

4) теория T допускает Δ - AP.

Назовем теорию Δ -мустафинской (Δ - M)-теорией, если в определении 1 рассматриваются только погружения.

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At)) = L^+$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ — множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists...\varphi$ (то есть формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Sigma_{n+1}^+ \subseteq L^+$. Пусть далее C обозначает фиксированное счетное бесконечное множество новых константных символов; T — произвольная $\Delta - M$ - теория счетного языка L^+. В качестве основных логических связок возьмем $\exists, \wedge, \vee, \neg$. Через $AL^+(C)$ обозначим множество всех атомарных предложений языка $L^+(C), \neg AL^+(C) = \{\neg\varphi : \varphi \in AL^+(C)\}$.

Определение 2.

1) Если φ — атомная формула, то $sub(\varphi) = \{\varphi\}$;

2) $sub(\neg\varphi) = sub(\varphi) \cup \{\neg\varphi\}$;

3) $sub(\exists x\, \varphi(x)) = sub(\varphi(x)) \cup \{\exists x\, \varphi(x)\}$;

4) $sub(\varphi \wedge \psi) = sub(\varphi) \cup sub(\psi) \cup \{\varphi \wedge \psi\}$;

5) $sub(\varphi \vee \psi) = sub(\varphi) \cup sub(\psi) \cup \{\varphi \vee \psi\}$.

Определение 3. Множество $Б \subseteq L^+(C)$ предложений языка $L^+(C)$ называется базисным, если:

1) $\varphi \in Б \;\&\; \psi \in sub(\varphi) \;\&\; \psi$ — предложение влечет $\varphi \in Б$;

2) $\varphi \in Б \;\&\; \psi(\bar{x}) \in sub(\varphi) \;\&\; \bar{c} \in C \;\&\; L(\bar{c}) = L(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{c}) \in Б$;

3) если $\varphi \in Б$ и не начинается с $\neg$, то $\neg\varphi \in Б$;

4) $AL^+(C) \subseteq Б$.

Определение 4. Пусть $Б$ — некоторое базисное множество. Тогда $p \subseteq Б$ называется $Б$-условием, если:

1) $|p| < \omega$;

2) $T \cup p$ совместно;

3) $\varphi \wedge \psi \in p \Rightarrow \varphi \in p \;\&\; \psi \in p$;

4) $\varphi \vee \psi \in p \Rightarrow \varphi \in p$ или $\psi \in p$;

5) $\exists x\, \varphi(x) \in p \Rightarrow$ существует такое $\bar{c} \in C$, что $\varphi(\bar{c}) \in p$.

Лемма 1. Если $Б$ — базисное множество, $p \subseteq Б$, $|p| < \omega$ и $T \cup p$ совместно, то существует такое $Б$-условие q, что $p \subseteq q$.

Определение 5. Индукцией по длине формул для любой пары (p, φ), где $p - Б$ -условие, φ — предложение $L^+(C)$, определим отношение $P|-^Б\varphi$ («$Б$ — условие p форсирует φ»):

1) $\varphi \in AL^+(C) \Rightarrow (p \,\|-^Б \varphi = \varphi \in p)$;

2) $p \,\|-^Б \varphi \wedge \psi = (p \,\|-^Б \varphi \;\&\; p \,\|-^Б \varphi)$;

3) $p \,\|-^Б \varphi \vee \psi = (p \,\|-^Б \varphi$ или $p \,\|-^Б \varphi)$;

4) $p \,\|-^Б \exists x\, \varphi(x) = (\exists \bar{c} \in C,\; p \,\|-^Б \varphi(\bar{c}))$;

5) $p \,\|-^Б \neg\varphi = \forall q\, (q \supseteq \bar{c} \;\&\; q - Б -$ условие $\Rightarrow$ не $q \,\|-^Б \varphi)$.

Лемма 2:

1) если $p, q - Б$-условия $p \subseteq q$, $p \,\|-^Б \varphi$, то $p \,\|-^Б \varphi$;

2) если $p - Б$-условие, φ — предложение $L^{+}(C)$, то либо не $p \| -^{Б} \varphi$, либо не $p \| -^{Б} \neg\varphi$;

3) если $\varphi \in Б$ и $\varphi \in p$, то $p \| -^{Б} \varphi$;

4) если $\varphi \in Б$ и $p \| -^{Б} \varphi$, то $p \cup \{\varphi\} \subseteq q$ для некоторого $Б$-условия q.

Определение 6:

1) если $G \subseteq Б$, то $G \| -^{Б} \varphi$ означает, что существует такое $Б$-условие p, что $p \subseteq G$ и $p \| -^{Б} \varphi$;

2) если $G \subseteq Б$, то G называется $Б$-генерическим множеством:

а) если $\varphi \in Б$ и $G \| -^{Б} \varphi$, то $\varphi \in G$;

б) если $\forall\, p \subseteq G \quad (|p| < \omega \Rightarrow \exists\, q\ (q - Б$ — условие & $p \subseteq q \subseteq G))$;

в) для любого φ из $L^{+}(C)$ либо $G \| -^{Б} \varphi$, либо $G \| -^{Б} \neg\varphi$.

Лемма 3. Если $G - Б$-генерическое множество, то $T \cup G$ совместно и для любого предложения φ из $L^{+}(C)$ имеет место в точности одно из соотношений $G \| -^{Б} \varphi$ либо $G \| -^{Б} \neg\varphi$.

Лемма 4. Любое *Б*-условие содержится в *некотором Б-генерическом* множестве.

Теорема 1. Пусть $G - Б$-генерическое множество. Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма счетная модель $M(G)$ языка $L^{+}(C)$ такая, что для любого предложения φ языка $L^{+}(C)$ имеет место $M(G) \models \varphi \Leftrightarrow G \| -^{Б} \varphi$.

Лемма 5. Пусть $G - Б$-генерическое множество, $\varphi, \psi \in Б$ и $\varphi \leftrightarrow \psi$ в логике первого порядка. Тогда $\varphi \in G \Leftrightarrow \psi \in G$.

Лемма 6. Для любого множества Q предложений языка $L^{+}(C)$ пересечение всех базисных множеств, содержащих Q, является базисным множеством (такое базисное множество обозначим через $[Q]$).

Примеры базисных множеств:

1) $R = AL(C) \cup \{\neg\varphi : \varphi \in AL(C)\}$ — робинсоновское базисное множество;

2) $Б_{\alpha} = [\Sigma_{\alpha}(L(C))]$, $0 \le \alpha \le \omega$.

Теорема 2. Пусть T — произвольная $\Delta - M$-теория счетного языка L^{+}. Тогда каждая $Б_{\alpha}$-генерическая модель является $\Sigma_{\alpha+1}$-замкнутой моделью T (позитивный аналог экзистенциальной замкнутости).

Лемма 7. Пусть T — произвольная $\Delta - M$-теория счетного языка L^{+}, $\Phi_n \subseteq \Sigma_{\alpha+1}$ и $\Phi_n = \left\{\Phi_i^n\left(x_1,\ldots,x_{m_n}\right) : i < \omega\right\}$, $n < \omega$.

Пусть для любого $n < \omega$, любых $c_1,\ldots,c_m \in C$, любого $Б_{\alpha}$-условия p существует такое $i < \omega$, что $T \cup p \cup \left\{\Phi_i^n\left(c_1,\ldots,c_{m_n}\right)\right\}$ совместно. Тогда существует генерическая модель M теории T, в которой выполнено бесконечное предложение $\underset{n<\omega}{\wedge} \forall x_1,\ldots,x_m \underset{i<\omega}{\vee} \psi_i^m(x_1,\ldots,x_m)$.

Стандартно определяется форсинг-компаньон $\Delta - M$-теории.

T^{f} есть форсинг компаньон теории T. $T^{f} = \{\varphi : T \Vdash \neg\neg\varphi\}$.

Приведем некоторые определения и связанные с ними результаты относительно стабильности в йонсоновском и в позитивном смыслах, полученные ранее. Все эти понятия и результаты можно найти в [3].

Пусть T — йонсоновская теория; $S^{J}(X)$ — множество всех экзистенциональных полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Определение 7. Мы говорим, что йонсоновская теория T $J-\lambda$-стабильна, если для любой T — экзистенционально замкнутой модели A, для любого подмножества X множества A $\left|X\right|\leq\lambda\Rightarrow\left|S^J(X)\right|\leq\lambda$.

Следующий результат показывает, что стабильность в указанном выше смысле хорошо согласовывается с классическим понятием стабильности.

Теорема 3. Пусть T — полная для экзистенциональных предложений, совершенная йонсоновская теория, $\lambda\geq\omega$. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T — $J-\lambda$-стабильна;

2) T^* — λ-стабильна, где T^* — центр теории T.

Рассмотрим некоторые обогащения сигнатуры. Будем обогащение называть допустимым, если в этом случае получаемая стабильность будет гарантировать определимость рассматриваемых типов. В дальнейшем все рассматриваемые обогащения допустимы. Пусть T — произвольная йонсоновская теория сигнатуры σ; C — ее семантическая модель; A — подмножество модели C; P — новый одноместный предикатный символ. Рассмотрим в сигнатуре $\sigma_P(A)=\sigma_A\cup\left\{P\right\}$ следующую (вообще говоря, неполную) теорию $T_P^J(A)=Th_{\forall\exists}(C,a)_{a\in A}\cup\left\{P(c_a)\mid a\in A\right\}\cup\left\{"P\subseteq"\right\}$, где $\left\{"P\subseteq"\right\}$ — бесконечное множество предложений, выражающее тот факт, что интерпретация символа P — это экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Требование экзистенциальной замкнутости от подмодели существенно в том смысле, что она не должна быть конечной. Через S_P^J обозначим множество всех $\exists$-пополнений теории $T_P^J(A)$. Пусть λ — произвольный кардинал.

Рассмотрим понятие стабильности в обогащении.

Определение 8. Йонсоновская теория T называется йонсоновской P-λ-стабильной (в дальнейшем $J-P-\lambda$-стабильной), если $\left|S^J(X)\right|\leq\lambda$ для любого множества A мощности $\leq\lambda$.

Определение 9. Йонсоновская теория T называется $J-P$-стабильной, если T является $J-P-\lambda$-стабильной для некоторого λ.

Следующие понятия связаны с йонсоновским обобщением понятия элементарной пары.

Пусть A,B — экзистенциально замкнутые модели йонсоновской теории T и выполняется включение $A\subsetneqq B$. Пусть $\sigma_P=\sigma\cup\left\{P\right\}$. Интерпретация одноместного предикатного символа P в B есть A.

Определение 10. Модель $\left(A,B\right)$ называется йонсоновской элементарной парой теории T.

Теорией йонсоновских элементарных пар называется теория T_P^J класса K, где K — множество всех йонсоновских элементарных пар теории T.

Лемма 8. Если T — совершенная йонсоновская теория, то $T_P^J(A)$ — совершенная йонсоновская теория.

Теорема 4. Пусть T — совершенная йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) центр теории T $P-\lambda$-стабилен (в смысле [7]),

2) теория T $J-P-\lambda$-стабильна.

Следствие 1. Пусть T — несчетно-категорическая йонсоновская $\exists$-полная теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) теория йонсоновских элементарных пар T_P^J является $\exists$-полной теорией;

2) теория элементарных пар центра теории T полна (в смысле [8]).

Напомним определение стабильности в рамках $\Delta-PM$-теории. Пусть T — произвольная $\Delta-PM$-теория в языке сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T, $A\subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A)=\sigma\cup\left\{c_a\mid a\in A\right\}\cup\Gamma$, где $\Gamma=\{P\}\cup\{c\}$. Рассмотрим следующую теорию:

$$T_\Gamma^{PM}(A)=Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C,a)_{a\in A}\cup\{P(c)\}\cup\{"P\subseteq"\},$$

где $\{"P\subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. Эта теория необязательно полная. Через S_{Γ}^{PM} обозначим множество всех $\Sigma_{\alpha+1}^{+}$-пополнений теории $T-P-\lambda$, где $T-P-\lambda$-стабильна, если $\left|S_{\Gamma}^{PM}\right| \le \lambda$ для любого A. Здесь $\left|A\right| \le \lambda$.

Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_{Γ}, где $\Gamma=\{c\}$. В силу $\Delta-PM$ -ности теории T^* существует ее центр, и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовем центральным типом теории T.

Легко заметить, что указанное выше определение можно рассмотреть в рамках $\Delta-M$ -теории. Мы получили следующий результат.

Теорема 5. Пусть λ — произвольный бесконечный кардинал, T — совершенная $\Delta-M$ -теория, полная для позитивных экзистенциальных предложений. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $T^*-P-\lambda$-стабильна;

2) $(T^*)^F-\lambda$-стабильна в классическом смысле, где $(T^*)^F$ — форсинг-компаньон теории T^* в обогащенной сигнатуре;

3) $T^c-\lambda$-стабильна в классическом смысле.

Далее отметим, что указанная выше связь стабильности центрального типа совершенной $\Delta-M$ - теории в рамках изучения форсинг-компаньона данной теории естественно порождает серию вопросов относительно указанных выше результатов первого автора (теоремы 3, 4, следствие 1).

Хорошо известно, что с помощью понятия форкинга выдающемуся математику-логику С.Шелаху удалось решить проблему классификации полных теорий относительно спектра. Для неполных теорий такая задача в общем виде абсолютно неподъемна, и, как правило, для классификации неполных теорий относительно рассматриваемой теоретико-модельной специфики математики выделяют некоторые естественные ограничения. Например, рассматривают данную проблематику в рамках изучения индуктивных теорий. Это оправдано хотя бы тем, что основные алгебраические объекты, как правило, задаются универсально-экзистенциальными аксиомами. Среди индуктивных особую роль играют йонсоновские теории, для которых существует метод исследования — семантический. Суть этого метода заключается в транслировании элементарных свойств первого порядка, присущих центру йонсоновской теории на саму теорию. Наибольший прогресс достигнут в описании совершенных йонсоновских теорий.

Основной идеей данной статьи является определение понятия форкинга в классе $\Delta-M$ -теорий с помощью семантического метода. Суть этого метода заключается в транслировании элементарных свойств некоторой полной теории (центра йонсоновской теории) на саму йонсоновскую теорию. Идея центрального типа восходит к различным обогащениям сигнатуры и выражениям типов через их объединения в старой сигнатуре. И в первом, и во втором случаях эти идеи позволяют перенести основные теоретико-модельные понятия, определенные для полных теорий, на йонсоновские теории и их позитивные обобщения, которые, вообще говоря, неполны. Описаны стабильностные свойства $\Delta-M$ -теорий, определен ксиоматическим путем форкинг для $\Delta-M$ -теорий и доказано, что в классе совершенных $\Delta-M$ -теорий введенное понятие эквивалентно форкингу в обычном смысле для стабильных их центров. Доказано, что синтаксическое подобие двух совершенных йонсоновских $\Delta-M$ -теорий эквивалентно синтаксическому подобию их центров в обогащенной сигнатуре.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ — множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists...\varphi$ (то есть формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$. Определим новый класс теорий, который является обобщением теорий, рассмотренных в [9]. В частности, если $n=0$, то мы получим частный случай $\Delta-PJ$ -теорий, рассмотренных в [10]. И в [10], и в [4] рассматриваемые теории являются обобщением йонсоновских теорий, при этом надо требовать, чтобы они таковыми были, так как существуют $\Delta-PJ$ -теории, которые не йонсоновские.

Напомним следующее определение [6]. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской ($\Delta-M$)-теорией, если в качестве морфизмов рассматриваются только погружения и верны следующие условия:

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π_{n+2}^{+}-аксиоматизируемой;

3) теория T допускает $\Delta-JEP$;

4) теория T допускает $\Delta-AP$.

Полученные результаты в данной статье отличаются от аналогичных исследований в этой области тем, что мы рассмотрим $\Delta - M$ -теории и их центры в обогащённой сигнатуре автоморфизмом, константой и предикатом. До этого автором рассматривались позитивные йонсоновские теории в [4], [6], [9], [10] и в более простом обогащении.

Пусть T — произвольная $\Delta - M$ -теория в языке сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию: $T_\Gamma^{PgM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M — автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$ -ности теории T^* существует её центр, и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T. Пусть T — произвольная $\Delta - M$ -теория указанной выше сигнатуры, тогда $E^+(T) = \bigcup_{n,m<\omega} E^+_{n,m}(T)$, где $E^+_{n,m}(T)$ есть решетка позитивных экзистенциальных формул с n-свободными переменными и с m-переменами кванторов.

Через S_Γ^M обозначим множество всех $\Sigma^+_{\alpha+1}$-пополнений теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$. Теория T будет λ-стабильна, если $\left|S_\Gamma^M\right| \le \lambda$ для любого A, такого что $|A| \le \lambda$.

Итак, нашей задачей является определение аксиоматическим путем понятия форкинга для совершенной $\Delta - M$ -теории в рамках условий обогащения сигнатуры.

Определение 11. Пусть $M - \Sigma^+_{\alpha+1}$-насыщенная Δ-позитивно $\alpha + 1$-экзистенциально замкнутая модель мощности κ (κ — достаточно большой кардинал) $\Delta - M$ -теории T ($\Sigma^+_{\alpha+1}$-насыщенность означает насыщенность относительно $\Sigma^+_{\alpha+1}$-типов в своей мощности). Напомним, что модель M теории T называется Δ-позитивно экзистенциально замкнутой, если для каждого Δ-гомоморфизма $f : M \xrightarrow[\Delta]{} N$ и каждого $\bar{a} \in M$, и $\varphi(\bar{x}, \bar{y}) \in \Delta : N \models \exists \bar{y} \varphi(f(\bar{a}), \bar{y}) \Rightarrow M \models \exists \bar{y} \varphi(\bar{a}, \bar{y})$.

Пусть T — $\Delta - M$ -теория, $S^M(X)$ — множество всех позитивных $\Sigma^+_{\alpha+1}$ полных n-типов над X, совместных с T, для каждого конечного n.

Пусть $A \in P(M)$, где $P(M)$ — класс всех подмножеств M; P — класс всех $\Sigma^+_{\alpha+1}$-типов (необязательно полных), пусть $PJNF \subseteq P \times A$ — некоторое бинарное отношение. Мы накладываем на $PJNF$ (позитивно йонсоновский неforкинг) следующие аксиомы:

Аксиома 1. Если $(p, A) \in PJNF, f \in Aut(M), f(A) = B$, то $(f(p), B) \in PJNF$.

Аксиома 2. Если $(p, A) \in PJNF, q \subseteq p$, то $(q, A) \in PJNF$.

Аксиома 3. Если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^{PM}(C)$, то $(p, A) \in PJNF \Leftrightarrow (p, B) \in PJNF$ и $(p|B, A) \in PJNF$.

Аксиома 4. Если $A \subseteq B, dom(p) \subseteq B, (p, A) \in PJNF$, то $\exists q \in S^{PM}(B)$ $(p \in q$ и $(q, A) \in PJNF)$.

Аксиома 5. Существует кардинал μ такой, что если $A \subseteq B \subseteq C, p \in S^M(B), (p, A) \in PJNF$, то $\left|\{q \in S^M(C) : p \subseteq q \text{ и } (q, A) \in PJNF\}\right| < \mu$.

Аксиома 6. Существует кардинал ρ такой, что $\forall p \in P$, $\forall A \in P(M)$, если $(p, A) \in PJNF$, то $\exists A_1 \subseteq A, (|A_1| < \rho$ и $(p, A_1) \in PJNF)$.

Аксиома 7. Если $p \in S^M(A)$, то $(p, A) \in PJNF$.

Определение 12. Множество формул $\left\{\varphi\left(\overline{x}, \overline{a_i}\right) : i < k\right\} = p$ называется k-несовместным для некоторого положительного целого k, если каждое конечное подмножество p мощности k несовместно, то есть $\models \neg \overline{x}(\varphi(\overline{x}, \overline{a}_{i_1}) \wedge ... \wedge \varphi(\overline{x}, \overline{a}_{i_k}))$ для каждого $i_1 < ... < i_k < k$.

Частичный тип делится над множеством относительно $k \in \omega$, если существуют формула $\varphi\left(\overline{x}, \overline{a}\right)$ и последовательность $\left\langle \overline{a_i} : i \in \omega \right\rangle$ такие, что:

1) $p \vdash \varphi(\overline{x}, \overline{a})$;

2) $tp(\overline{a} / A) = tp(\overline{a_i} / A)$ для всех i;

3) $\left\{\varphi\left(\overline{x}, \overline{a_i}\right) : i \in \omega\right\}$ k-несовместно.

Также p делится над A относительно некоторого k. Кроме того, p форкуется над A в T, если существуют формулы $\varphi_0(\overline{x}, \overline{a_0}), ..., \varphi_n(\overline{x}, \overline{a_n})$ такие, что:

(i) $p \models \bigcup_{0 \le i \le n} \varphi_i(\overline{x}, \overline{a_i})$;

(ii) $\varphi_i(\overline{x}, \overline{a_i})$ делится над A для каждого i.

Следующая договоренность является важной. Фактически мы будем говорить о семантическом аспекте $\Delta - M$-теории. Если $\Delta - M$-теория T является α-йонсоновской, то с $ModT$ мы работаем как с классом моделей некоторой йонсоновской теории. Если же $\Delta - M$-теория T не является α-йонсоновской, то в качестве $ModT$ мы будем рассматривать класс ее позитивно экзистенциально замкнутых моделей $\Sigma^+_{\alpha+1}T$. Такой подход для класса $\Sigma^+_{\alpha+1}T$-класса экзистенциально замкнутых моделей произвольной универсальной теории T был рассмотрен в [4]. Так как относительно йонсоновских теорий возможны два случая: совершенный и несовершенный, то мы будем придерживаться следующего. Хорошо известно, что если йонсоновская теория T совершенна, то класс ее экзистенциально замкнутых моделей элементарен и совпадает с $ModT^*$, где T^* — ее центр. В противном случае, то есть если теория T несовершенна, мы поступаем аналогично [4], только вместо $ModT$ работаем с классом $\Sigma^+_{\alpha+1}T$. Этот класс рассматривается как расширение E_T-класса экзистенциально замкнутых моделей (оба класса всегда существуют), и в зависимости от совершенности и несовершенности теории T теоретико-модельные свойства класса $\Sigma^+_{\alpha+1}T$ представляют особый интерес. В данной статье при рассмотренном Δ эти $\Delta - M$-теории являются $\Delta - M$-совершенными, что является естественным обобщением совершенности в йонсоновском смысле.

Определение 13. Следуя [11], мы говорим, что модель $A \in K$ является *simple* в классе K, если для любого $B \in K$ такого, что существует гомоморфизм $h : A \to B$, следует, что h является вложением. Мы говорим, что теория T удовлетворяет условию (S), если каждая модель $A \in K$ является *simple* в классе K. В [11] замечено, что (S) эквивалентно следующему синтаксическому свойству: (S'). Каждая экзистенциальная формула в L эквивалентна в T некоторой позитивной экзистенциальной формуле.

Легко заметить, что нейонсоновская $\Delta - M$-теория T в силу договоренности о $ModT$ удовлетворяет свойству (S').

Мы будем использовать в доказательстве теоремы 7 следующие результаты:

Теорема 6 (Ramsey F.P.). Пусть I — бесконечное множество, $n < \omega$, $|I|^n$ — семейство всех подмножеств множества I, которые состоят точно из n элементов. Если $|I|^n = A_0 \cup ... \cup A_{k-1}$, $k < \omega$, $A_i \cap A_j = \varnothing$ с $i < j < k$, то существует бесконечное $J \subset I$ такое, что $|J|^n \subset A_i$ для некоторого $i < k$.

Лемма 9 [12; лемма 14.9]. Пусть T — стабильная теория, M — насыщенная модель мощности μ^+, типы $p_1, p_2 \in S(M)$ не форкуются над A. Тогда если $p_1 \upharpoonright A = p_2 \upharpoonright A$, то существует тождественный на A элементарный мономорфизм f, такой что $f(d_1) \sim d_2$, где d_1, d_2 — схемы, определяющие p_1, p_2 соответственно.

Класс всех Δ-позитивно $\alpha+1$ экзистенциально замкнутых моделей теории T обозначим через $\Sigma^+_{\alpha+1}T$.

Определение 14. Мы говорим, что $\Delta - M$-теория T $M - \lambda$-стабильна, если для любой модели $A \in \Sigma^+_{\alpha+1}T$, для любого подмножества X множества A $|X| \le \lambda \Rightarrow |S^M(X)| \le \lambda$. $\Delta - M$-теория T M-стабильна, если она $M - \lambda$-стабильна для некоторого λ.

Вопросы, касающиеся стабильности $\Delta - M$-теорий в более общей ситуации, но в более бедной сигнатуре, рассмотрены в [13–16].

Мы получили следующие результаты относительно таких теорий.

Теорема 7. Пусть $T - \Delta - M$-теория, α-йонсоновская, совершенная, полная для $E_{\alpha+1}$-предложений, $\lambda \ge \omega$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T — $M - \lambda$-стабильна;

2) $T^* - \lambda$-стабильна, где T^* — центр йонсоновской теории T.

Теорема 8. Пусть T — $\Delta - M$-теория, α-йонсоновская, совершенная, полная для $\Sigma_{\alpha+1}$-предложений. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) отношение $PJNF$ удовлетворяет аксиомам 1–7 относительно теории T;

2) T^* стабильна и для любых $p \in P$, $A \in P(M)$ $((p, A) \in PJNF \Leftrightarrow p$ не форкуется над A в смысле Шелаха).

Формулировка приведенной ниже теоремы на языке центральных типов в обогащенной сигнатуре выглядит следующим образом:

Теорема 9. Пусть T — $\Sigma_{\alpha+1}$-полная, совершенная $\Delta - M$ теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) теория $T^c - P - \lambda$-стабильна в смысле [17];

2) теория $T^* - J - P - \lambda$-стабильна.

Остановимся на том, что означает данный предикат. В свое время известный французский математик Б.Пуаза определил понятия элементарной пары моделей. По сути это модель, в которой в качестве элементарной подмодели рассматривается реализация одноместного предикатного символа. В дальнейшем Т.Г.Мустафиным было введено понятие T-стабильности, которое обобщает указанное выше понятие элементарной пары. Последним достижением в связи с этим вопросом является понятие E-стабильности, введенное и рассмотренное Е.А.Палютиным. Понятие E-стабильности отличается от понятия T-стабильности в том смысле, что оно устойчиво относительно определимости. Напомним, что в классическом случае если теория стабильна, то любой тип определим.

Заметим, что указанное выше обогащение сигнатуры сохраняет определимость полученной стабильности.

Замечание. Заметим, что, так как теория, полная для экзистенциальных предложений, удовлетворяет свойству совместного вложения $A \in E^+_T$, обратное неверное условие A-полноты в теореме снять нельзя. В связи с тем, что существует континуум неэлементарно эквивалентных между собой экзистенциально замкнутых групп, а теория групп является йонсоновской, то можно сделать вывод, что в условии теоремы нельзя убрать требование совершенности.

Далее приведем результаты, связанные с подобиями $\Delta - M$-теорий в обогащенной сигнатуре. Аналогичные вопросы рассмотрены в [18–21].

Пусть T — произвольная $\Delta - M$-теория, тогда $E^+(T) = \bigcup_{n,m<\omega} E^+_{n,m}(T)$, где $E^+_{n,m}(T)$ — решетка позитивных экзистенциальных формул с n свободными переменными и с m-переменами кванторов.

Определение 15. Пусть T_1 и T_2 — $\Delta - M$-теории. Предположим, что T_1 и T_2 $\Delta - M$ синтаксически подобны, если существует биекция $j : E^+(T_1) \to E^+(T_2)$ такая, что:

1) ограничение f до $E^+_{n,m}(T_1)$ есть изоморфизм решеток $E^+_{n,m}(T_1)$ и $E^+_{n,m}(T_2)$, $m, n < \omega$;

2) $f(\exists \nu_{n+1}\varphi) = \exists \varphi_{n+1} f(\varphi)$, $\varphi \in E^+_n(T)$, $n < \omega$;

3) $f(\nu_1 = \nu_2) = (\nu_1 = \nu_2)$.

Один из полученных результатов в рамках указанных выше определений выглядит следующим образом:

Теорема 10. Пусть T_1 и T_2 — Σ^+_{m+1}-полные, совершенные, йонсоновские $\Delta - M$ -теории. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T_1^* и T_2^* $\Delta - M$ – синтаксически подобны;

2) T_1^c и T_2^c – синтаксически подобны (в смысле [19]).

Вообще говоря, в определении синтаксического подобия не предполагается совпадения сигнатур рассматриваемых теорий. Если в дальнейшем предположить, что все теории одной сигнатуры, и не различать между собой изоморфные модели, то мы имеем следующие результаты.

Теорема 11. Пусть T_1 и T_2 — $\Delta - M$ -теории, совершенные, йонсоновские, Σ^+_{m+1}-полные, Тогда если они $\Delta - M$ -синтаксически подобны, то их центры $\Delta - PJ$ -косемантичны между собой.

Все неопределенные в данной статье понятия можно прочитать в [3].

Список литературы

1 *Barwise K.J. and Robinson A*. Completing theories by forcing // Ann. Math. — Logic 2. — 1970. — P. 119–142.

2 *Keisler H.J.* Forsing and omitting tupes theorem // M.A.A. Studies. — 1973, № 8. — P. 96–133.

3 *Ешкеев А.Р*. Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

4 *Мустафин Т.Г.* Обобщенные условия Йонсона и описание обобщенно йонсоновских теорий булевых алгебр // Математические труды. — Новосибирск. — 1998. — Т. 1, № 1. — С. 135–197.

5 *Itay Ben-Yaacov.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 3. 2003. — № 1. — P. 85–118.

6 *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность $\Delta - PM$ -теорий // Тез. докл. 12-ой Межвуз. Конф. по матем., мех. и информ. (10–14 сент. 2008 г.). — Алматы: Изд-во Қазақ ун-ті, 2008. — С. 67.

7 *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий // Сб. тр. советско-французского коллоквиума по теории моделей. — Караганда, 1990. — С. 112–125.

8 *Poizat B.* Paires des structures stables // J.Symbolic Logic. — 48. — 1983. — С. 239–249.

9 *Ешкеев А.Р.* О центральных типах $\Delta - PM$ -теорий // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — № 4 (56). — С. 34–39.

10 *Ешкеев А.Р.* Категоричные позитивные теории. Синтаксис и семантика логических систем: Материалы российской школы-семинара, посвящ. 100-летию со дня рождения Курта Геделя (23–27 августа). — Иркутск: Ин-т математики СО РАН; Изд-во гос. пед. ун-та, 2006. — С. 28–32.

11 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. / Под ред. Дж.Барвайса. — Ч. 1. — Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 126 с.

12 *Мустафин Т.Г.* Стабильные теории. — Караганда, 1981. — 92 с.

13 *Ешкеев А.Р.* PM -стабильность $\Delta - PM$ -теорий // Вычислимость и модели: Материалы междунар. науч. конф. (30 августа–1 сентября). — Усть-Каменогорск, 2009. — С. 12, 13.

14 *Ешкеев А.Р., Бегетаева Г.С.* Стабильность $\Delta - PM$ -теории и её центра // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. — 2009. — № 4 (56). — С. 29–34.

15 *Ешкеев А.Р.* О форкинге для $\Delta - PM$ теории и стабильность центральных типов $\Delta - PJ$ -теорий в обогащённой сигнатуре // Вестн. КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2009. — № 3(62). — С. 8–15.

16 *Yeshkeyev A.R.* On Jonsson stability and some of its generalizations // Journal of Mathematical Sciences, Springer New York. — 2010. — Vol. 166, № 5. — С. 646–654.

17 *Мустафин Т.Г., Нурмагамбетов Т.А.* О *p*-стабильности полных теорий. Структурные свойства алгебраических систем: Сб. науч. тр. — Караганда: Изд-во КарГУ, 1990. — С. 88–100.

18 *Ешкеев А.Р.* Подобие теорий предметных областей. Знания-Онтологии-Теории: (ЗОНТ-09) ИМ СО РАН: Материалы Всеросс. конф. (22–24 октября). — Новосибирск, 2009. — С. 207–212.

19 *Ешкеев А.Р.* О косемантичности центральных типов $\Delta - PJ$ -теорий // Актуальные проблемы математики, информатики, механики и теории управления: Материалы междунар. науч.-практ. конф., посвящ. 60-летию д.т.н., проф., акад. Национ. инжен. акад. Т.Н.Биярова: (19–20 ноября). — Алматы, 2009. — С. 442, 443.

20 *Ешкеев А.Р.* О подобии и косемантичности центральных типов в позитивных обобщениях йонсоновских теорий // Вестник КазНУ. Сер. Математика, механика, информатика. — 2009. — № 5(64). — С. 7–14.

21 *Yeshkeyev A.R., Begetayeva G.S.* On similarities of Jonsson's theories and it's generalizations // Education and Science without borders, Journal. — Prague, Czech Republic. — 2010. — Vol. 1, № 1. — С. 128–130.

А.Р.Ешкеев

Йонсондық теориялардың компаньондарының тұрақты қасиеттері

Мақалада $\Delta - M$ -теория үшін шекті α -форсингтің позитивті аналогы зерттелген. Стабильділік және позитивті экзистенциалды толықтылығы арқылы берілген теорияның централдық типтің және теорияның форсинг компаньондық парапарлығы көрсетілген. Теориялардың тұрақты қасиеттерін зерттегенде «форкинг» деген ұғым өте маңызды роль ойнайды. Бұл ұғымды С.Шелах толық теориялардың спектралды сұрақтарын зерттегенде енгізген. Йонсондық теориялар, жалпы айтқанда, толық емес. Автормен аксиомалық түрде форкинг анықтау проблемасымен $\Delta - M$ -теориясының аясында кейбір нәтижелер келтірілген. Осы теориялар йонсондық теориялардың позитиві жалпыламалары болып табылады. Сигнатураны кейбір байытуда орталық типтің ұғымы қарастырылған, сонымен қатар осы типтің теориямен байланыстары көрсетілген. Синтаксистік ұқсастық бойынша, семантикалық ұқсастық арқылы инвариантты кейбір стабильді қасиеттер $\Delta - M$ -теорияларының кластар аясында қарастырылған.

A.R.Yeshkeyev

Stable properties of companions of positive Jonsson theories

In the given paper we consider the positive analog of finite α -forcing for the $\Delta - M$ theory. The equivalence of stability of the central type of the such theory with it the forcing companion under condition of stability and positive existential completeness was showed. In the study of stable properties of theories, the important role played the concept of forking entered by S.Shelah in the study of spectral problems of complete theories. Jonsson theories in general are incomplete. In this paper we present some results concerning the axiomatic way of setting of a forking on a case of $\Delta - M$ -theories that are a positive generalization of Jonsson theories. There were also considered a central type concept for some enrichment of signature and connection with the central type of this theory. With the help of syntactic similarity invariant under the semantic similarity of some stable properties with respect in the class of $\Delta - M$ -theories was considered.

References

1 Barwise K.J. and Robinson A. *Ann. Math. Logic 2*, 1970, p. 119–142.

2 Keisler H.J. *M.A.A. Studies*, 1973, 8, p. 96–133.

3 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: KarGU, 2009, p. 250.

4 Mustafin T.G. *Matematicheskiye trudy*, Novosibirsk, 1998, 1 (1), p. 135–197.

5 Itay Ben-Yaacov. *Journal of Mathematical Logic, 3*, 2003, 1, p. 85–118.

6 Yeshkeyev A.R. *Counting categorical* $\Delta - PM$ *-theories*, Tezisy dokladov 12-oy Mezhvuzovskoy konferentsii po matematike, mekhanike i informatike (10–14, Sentyabrya 2008 g), Almaty: Publ. Kazak un-ti, 2008, p. 67.

7 Mustafin T.G. *Sbornik trudov sovetsko-frantsuzskogo kollokviuma po teorii modeley*, Karaganda, 1990, p. 112–125.

8 Poizat B. *J.Symbolic Logic*, 1983, 48, p. 239–249.

9 Yeshkeyev A.R. *Bull. Karagand. un-ta, Ser. matematika*, 2009, 4 (56), p. 34–39.

10 Yeshkeyev A.R. *Categorical positive theory*, Sintaksis i semantika logicheskikh sistem: Materialy rossiyskoy shkoly-seminara, posvyashchennoy 100-letiyu so dnya rozhdeniya Kurta Gedelya (23–27, Avgust), Irkutsk, Institut matematiki SO RAN, Izd-vo gos. Ped. Un-t, 2006, p. 28–32.

11 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts*, Pod red. Dzh.Barvaysa, Ch.1, Teoriya modeley: per. s angl., Moscow: Nauka, 1982, p. 126.

12 Mustafin T.G. *Stable theories*, Karaganda, 1981, p. 92.

13 Yeshkeyev A.R. *PM -stable of* $\Delta - PM$ *-theories*, Tezisy dokladov, Vychislimost i modeli: Materialy mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii, (30 avgusta–1 sentyabrya), Ust-Kamenogorsk, 2009, p. 12–13.

14 Yeshkeyev A.R., Begetaeva G.S. *Bull. Karagand. un-ta*, Ser. matematika, 2009, 4 (56), p. 29–34.

15 Yeshkeyev A.R. *Bull. KazNU.* Ser. matematika, mekhanika, informatika, 2009, 3 (62), p. 8–15.

16 Yeshkeyev A.R. *Journal of Mathematical Sciences*, Springer New York, 2010, 166, 5, p. 646–654.

17 Mustafin T.G., Nurmagambetov T.A. *Sbornik nauchnykh trudov*, Karaganda: Publ. KarGU, 1990, p. 88–100.

18 Yeshkeyev A.R. *The similarity theory of subject areas*, Znaniya-Ontologii-Teorii: (ZONT-09) IM SO RAN: Materialy Vserossiyskoy konferentsii (22–24, oktyabrya), Novosibirsk, 2009, p. 207–212.

19 Yeshkeyev A.R. *About kosemantichnost of central-type* $\Delta - PJ$ *theories*, Aktualnyye problemy matematiki, informatiki, mekhaniki i teorii upravleniya, posvyashchennoy 60-letiyu d.t.n., prof., akademika Nats.inzh.akad. Biyarova T.N.: Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (19–20 noyabrya), Almaty, 2009, p. 442–443.

20 Yeshkeyev A.R. *Bull. KazNU*. Ser. matematika, mekhanika, informatika, 2009, 5 (64), p. 7–14.

21 Yeshkeyev A.R., Begetayeva G.S. *Education and Science without borders, Journal*, 2010, 1 (1), p. 128–130.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев[1,2], О.И.Ульбрихт[1,2], Р.М.Оспанов[2,3]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[2]*РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда;*
[3]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, Астана (E-mail: modth1705@mail.ru)*

Свойства моделей центра и центрального типа некоторых позитивных йонсоновских теорий в допустимых обогащениях сигнатуры

Основная цель статьи — описание структуры ядерных моделей сильно выпуклых Δ -*R*-совершенных теорий в некотором обогащении сигнатуры и рассмотрение вопроса А.Д.Тайманова для позитивных йонсоновских теорий. В работе изучены алгебраически простые и атомные модели позитивных робинсоновских теорий. Для них дан критерий несчетной категоричности. В рамках сформулированных понятий было показано, что положительное решение вопроса А.Д.Тайманова совпадает как для центрального типа такой теории, так и для центра этой теории.

Ключевые слова: позитивная робинсоновская теория, обогащение сигнатуры, атомная модель, алгебраически простая модель, экзистенциально замкнутая модель, категоричность, позитивная мустафинская теория, позитивная йонсоновская теория, совершенность позитивной йонсоновской теории, обогащение сигнатуры, центральный тип, компаньоны йонсоновской теории.

В последнее время появились работы по позитивной теории моделей. Отметим некоторые из них [1, 2]. Хотя позитивность в обоих случаях определяется по-разному, но в частном случае, когда Δ является минимальным фрагментом из [1], он совпадает с $B^+(At)$ из [2].

Определим позитивность в рамках работы [2].

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+. Таким образом, в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$, мы получаем обычную йонсоновскую теорию, с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий, касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле), считаются известными, и их можно извлечь, например, в [2].

Определим понятие Δ -йонсоновских теорий(Δ -*J*-теории).

В том случае, если при некотором фиксированном Δ в определении $\Delta - PJ$ -теории (см. определение в [2]) заменить все Δ -продолжения на Δ -погружения, то мы получим определение Δ -йонсоновских теорий (Δ -*J*-теории). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличие от (Δ -*PJ*) теорий, которые могут быть, вообще говоря, и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Легко заметить, что Δ -йонсоновская теория является частным случаем Δ -мустафинской теории.