

- [11] Сакс Р.С. Задача Коши для уравнений Навье–Стокса, метод Фурье // Уфимский математический журнал. - 2011. - Т. 3, 1. - С. 53–79.
- [12] Похожаев С.И. Гладкие решения уравнений Навье–Стокса // Математический сборник. - 2014. - Т. 205, 2. - С. 131–144.
- [13] Otelbaev M., Koshanov B.D. Correct Contractions stationary Navier-Stokes equations and boundary conditions for the setting pressure // AIP Conference Proceedings. - 2016. - 1759. <http://dx.doi.org/10.1063/1.4959619>.
- [14] Otelbaev M., Koshanov B.D., Shynybekov A. Evaluation of solutions of one class of finite-dimensional nonlinear equations. *Kazakh Mathematical Journal*. 2025.

## ДРОБНОЕ НЕРАВЕНСТВО ГРОНУОЛЛА ДЛЯ ИНТЕГРАЛОВ НА БЕСКОНЕЧНОМ ИНТЕРВАЛЕ

Псху А.В.<sup>1</sup>, Омаров М.Т.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, Россия

<sup>1</sup>E-mail: pskhu@list.ru

<sup>2</sup>Карагандинский университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

**Аннотация.** В работе формулируется аналог интегрального неравенства Гронуолла для случая, когда интегральный член включает правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля по полубесконечному интервалу  $(t, \infty)$  с ядром  $(s-t)^{\alpha-1}$ . Представлена теорема, дающая оценку для функции  $u(t)$ , удовлетворяющей неравенству  $u(t) \leq a(t) + \lambda_0 \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} u(s) ds$ , в виде ряда, построенного на основе итераций функции  $a(t)$ . В качестве следствия приводится явная оценка для экспоненциально убывающей свободной функции  $a(t)$ . Результаты актуальны для анализа асимптотического поведения решений дробных дифференциальных уравнений.

Классическое неравенство Гронуолла (1) является важным инструментом в теории дифференциальных уравнений. Его обобщения на случай дробных операторов, как правило, рассматривают левосторонние интегралы (по  $(t_0, t)$ ) (2). В данной работе исследуется аналог для правосторонних дробных интегралов, возникающих при изучении поведения решений на бесконечности.

Рассмотрим правосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля:

$$D_{\infty t}^{-\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_t^\infty (s-t)^{\beta-1} f(s) ds. \quad (1)$$

Пусть  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $\lambda_0 \geq 0$ . Пусть неотрицательные функции  $u(t)$ ,  $a(t)$  для  $t \in [T_0, \infty)$  удовлетворяют неравенству:

$$u(t) \leq a(t) + \lambda_0 \int_t^\infty (s-t)^{\alpha-1} u(s) ds. \quad (2)$$

При определенных условиях на существование интегралов  $D_{\infty t}^{-n\alpha} a(t)$ ,  $D_{\infty t}^{-n\alpha} u(t)$  и стремлении к нулю остаточного члена итерационного процесса  $(\lambda_0 \Gamma(\alpha))^N D_{\infty t}^{-N\alpha} u(t) \rightarrow 0$  при

$N \rightarrow \infty$ , справедлива оценка:

$$u(t) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 \Gamma(\alpha))^n D_{\infty t}^{-n\alpha} a(t), \quad (3)$$

если ряд сходится. Доказательство основано на итерационном применении (2).

В качестве важного следствия, если  $a(t) = Ce^{-\delta_a t}$  ( $C \geq 0, \delta_a > 0$ ) и  $\lambda_0 \Gamma(\alpha) < \delta_a^\alpha$ , то

$$u(t) \leq \frac{Ce^{-\delta_a t}}{1 - \frac{\lambda_0 \Gamma(\alpha)}{\delta_a^\alpha}}. \quad (4)$$

Эта оценка получается подстановкой  $D_{\infty t}^{-n\alpha}(Ce^{-\delta_a t}) = Ce^{-\delta_a t} / \delta_a^{n\alpha}$  в (3) и суммированием геометрической прогрессии.

Полученные неравенства (3) и (4) являются новыми для правосторонних дробных операторов и могут быть использованы для анализа асимптотики решений дробных дифференциальных уравнений, например, для установления скорости их убывания на бесконечности (3; 2).

## Список литературы

- [1] Gronwall T.H. Note on the derivatives with respect to a parameter of the solutions of a system of differential equations // *Annals of Mathematics*. 1919. Vol. 20, No. 2. P. 292–296.
- [2] Ye H., Gao J., Ding Y. A generalized Gronwall inequality and its application to a fractional differential equation // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2007. Vol. 328, No. 2. P. 1075–1081.
- [3] Podlubny I. *Fractional Differential Equations*. Academic Press, 1999.
- [4] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam, 2006.

## РАЗРЕШИМОСТЬ ИНВОЛЮТИВНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Сарсенби Абдижахан<sup>1</sup>, Сарсенби Абдисалам<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Южно Казахстанский университет имени М.Ауэзова, Шымкент, Казахстан

<sup>1</sup>E-mail: abzhahan@gmail.com

<sup>2</sup>Университет Дружбы народов имени академика А.Куатбекова, Шымкент, Казахстан

<sup>2</sup>E-mail: abdisalam.sarsenbi@gmail.com

В вещественном гильбертовом пространстве  $H$  с нормой  $\|\cdot\|$  рассматривается следующая задача

$$-y''(x) + \alpha y''(-x) + \gamma^2 y(x) + f(x, y(x), y(-x)) = h(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$