19 Yeshkeyev A.R. *About kosemantichnost of central-type* $\Delta - PJ$ *theories*, Aktualnyye problemy matematiki, informatiki, mekhaniki i teorii upravleniya, posvyashchennoy 60-letiyu d.t.n., prof., akademika Nats.inzh.akad. Biyarova T.N.: Materialy Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii (19–20 noyabrya), Almaty, 2009, p. 442–443.

20 Yeshkeyev A.R. *Bull. KazNU*. Ser. matematika, mekhanika, informatika, 2009, 5 (64), p. 7–14.

21 Yeshkeyev A.R., Begetayeva G.S. *Education and Science without borders, Journal*, 2010, 1 (1), p. 128–130.

УДК 510.67

А.Р.Ешкеев[1,2], О.И.Ульбрихт[1,2], Р.М.Оспанов[2,3]

[1]*Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова;*
[2]*РГКП «Институт прикладной математики» КН МОН РК, Караганда;*
[3]*Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилёва, Астана (E-mail: modth1705@mail.ru)*

Свойства моделей центра и центрального типа некоторых позитивных йонсоновских теорий в допустимых обогащениях сигнатуры

Основная цель статьи — описание структуры ядерных моделей сильно выпуклых Δ -*R*-совершенных теорий в некотором обогащении сигнатуры и рассмотрение вопроса А.Д.Тайманова для позитивных йонсоновских теорий. В работе изучены алгебраически простые и атомные модели позитивных робинсоновских теорий. Для них дан критерий несчетной категоричности. В рамках сформулированных понятий было показано, что положительное решение вопроса А.Д.Тайманова совпадает как для центрального типа такой теории, так и для центра этой теории.

Ключевые слова: позитивная робинсоновская теория, обогащение сигнатуры, атомная модель, алгебраически простая модель, экзистенциально замкнутая модель, категоричность, позитивная мустафинская теория, позитивная йонсоновская теория, совершенность позитивной йонсоновской теории, обогащение сигнатуры, центральный тип, компаньоны йонсоновской теории.

В последнее время появились работы по позитивной теории моделей. Отметим некоторые из них [1, 2]. Хотя позитивность в обоих случаях определяется по-разному, но в частном случае, когда Δ является минимальным фрагментом из [1], он совпадает с $B^+(At)$ из [2].

Определим позитивность в рамках работы [2].

Пусть L — язык первого порядка. At есть множество атомарных формул данного языка. $B^+(At)$ — замкнутое множество относительно позитивных булевых комбинаций (конъюнкция и дизъюнкция) всех атомарных формул, их подформул и замены переменных. $Q(B^+(At))$ есть множество формул в пренексном нормальном виде, полученное с помощью применения кванторов ($\forall$ и $\exists$) к $B^+(At)$. Назовем формулу позитивной, если она принадлежит множеству $Q(B^+(At))$. Теория называется позитивно аксиоматизируемой, если ее аксиомы позитивны. $B(L^+)$ — это произвольная булева комбинация формул из L^+. Таким образом, в дальнейшем мы в качестве морфизмов имеем только погружения.

Когда $\Delta = B(At)$, мы получаем обычную йонсоновскую теорию, с той лишь разницей, что у нее только позитивные $\forall\exists$-аксиомы.

В дальнейшем все определения понятий, касающихся йонсоновских теорий (в обычном смысле), считаются известными, и их можно извлечь, например, в [2].

Определим понятие Δ -йонсоновских теорий(Δ -*J*-теории).

В том случае, если при некотором фиксированном Δ в определении $\Delta - PJ$ -теории (см. определение в [2]) заменить все Δ -продолжения на Δ -погружения, то мы получим определение Δ -йонсоновских теорий (Δ -*J*-теории). Легко заметить, этот класс теорий является позитивным обобщением йонсоновских теорий в отличие от (Δ -*PJ*) теорий, которые могут быть, вообще говоря, и нейонсоновскими. В нашем случае это не так, так как продолжения всегда являются вложениями.

Легко заметить, что Δ -йонсоновская теория является частным случаем Δ -мустафинской теории.

Пусть T — произвольная $\Delta - M$ -теория в языке сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию: $T_\Gamma^{PgM}(A) = Th_{\Pi^+_{\alpha+2}}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M -автоморфизм M;

2) $\{m \in M \mid g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально замкнутой подмодели M для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$. Данное обогащение сигнатуры рассмотрено для $\Delta - M$ -теории, в случае $\Delta - J$ -теории в записи предложений из $T_\Gamma^{PgM}(A)$ участвуют предложения только преникса длины 2.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$ -ности теории T^* существует её центр, и мы обозначим его как T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

В данной работе рассмотрен позитивный аналог вопроса А.Д.Тайманова для булевых алгебр в рамках решёток экзистенциальных формул рассматриваемого позитивного языка. Впервые подобной проблематикой занимался Т.Г.Мустафин, в частности, в связи с этим вопросом он получил ответы на некоторые частные случаи. Сформулируем вопрос А.Д.Тайманова, учитывая, что данная проблема была определена для полных теорий.

А именно, при изучении свойств моделей полных теорий первого порядка полезными являются сведения о булевых алгебрах (алгебрах Линденбаума-Тарского) $F_n(T)$, $n \in \omega$, теории T [3]. В связи с этими булевыми алгебрами $F_n(T)$, $n \in \omega$, хорошо известен вопрос А.Д.Тайманова (можно ознакомиться в работе [4]):

(*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры B_n, $n \in \omega$, чтобы существовала полная теория T, такая что B_n была изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$?

В [4] Т.Г.Мустафиным были даны ответы на частные случаи этого вопроса. Им были получены следующие результаты:

Теорема 1 [4]. Для любой булевой алгебры B существует такая полная теория T, что:

а) $B \cong F_1(T)$;

б) если B конечная, то T категорична в счетной мощности;

в) если стоуновское пространство алгебры B счетно, то T тотально трансцендентна.

Теорема 2 [4]. Для того, чтобы для конечных булевых алгебр B_1, B_2 существовала такая категоричная в счетной мощности теория T, что $F_1(T) \cong B_1, F_2(T) \cong B_2$, необходимо и достаточно, чтобы число атомов B_2 было больше квадрата числа атомов B_1.

Естественным обобщением вопроса А.Д.Тайманова было бы рассмотрение этой проблематики в рамках неполных теорий, в частности, в йонсоновских теориях и их позитивных обобщениях. Проследим развитие теории моделей относительно видов формул (синтаксис), которые изучаются, и морфизмов моделей (семантика). Для этого мы можем обратиться к известной статье Дж.Кейслера о развитии теории моделей в [5].

Им выделено два направления в развитии теории модели. Их называют западной и восточной теориями моделей, так как один из основоположников теории моделей А.Тарский жил на западном побережье США с 1940 г., а другой основоположник А.Робинсон — на восточном. Западная теория моделей развивается в традициях Скулема и Тарского. Она в большей степени мотивировалась проблемами в теории чисел, анализе и теории множества, и в ней используются все формулы логики первого порядка.

Восточная теория моделей развивается в традициях Мальцева и Робинсона. Она мотивировалась проблемами в абстрактной алгебре, где формулы теорий обычно имеют самое большее два блока кванторов. Она делает ударение на множества бескванторных формул и экзистенциальных формул. В отличие от западной теории моделей, которая изучает полные теории, восточная теория моделей, вообще говоря, имеет дело с неполными теориями. В частности, в качестве морфизмов в восточной теории моделей рассматриваются изоморфные вложения и гомоморфизмы, а в западном варианте — элементарные вложения. Класс неполных теорий достаточно широк, поэтому можно ограничиться индуктивными теориями ($\forall\exists$-аксиоматизируемыми). В смысле полноты рассматриваемой теории максимальное требование, как правило, — $\forall\exists$-полнота. Всем этим условиям удовлетворяют йонсоновские теории. Таким образом, сделаем вывод, что изучение йонсоновских теорий относится по своей сути к проблематике восточной теории моделей. Теперь мы можем переопределить вопрос А.Д.Тайманова в рамках восточной теории моделей. Прежде всего запишем следующую договорённость, которая играет важную роль в дальнейшем.

Мы будем говорить, что вопрос (*) решается положительно для теории T, если существует такая последовательность булевых алгебр B_n, $n \in \omega$, что B_n изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$.

В данной статье мы рассмотрим указанный выше вопрос в рамках изучения неполных теорий, а именно в классе йонсоновских теорий. Напомним основные определения.

Определение 1. Теория T называется йонсоновской, если она:

1) имеет бесконечные модели;
2) индуктивна;
3) обладает свойством совместного вложения (*JEP*);
4) имеет свойство амальгамы (*AP*).

Теория индуктивна, если она устойчива относительно объединения цепей. Известна следующая:

Теорема 3 (Чэн-Лось-Сушко). Теория T устойчива относительно объединения цепей, если и только если она $\forall\exists$-аксиоматизируема, то есть эквивалентна множеству $\forall\exists$-предложений.

Теория T обладает свойством совместного вложения, если для любых моделей U, B теории T существует модель M теории T и изоморфные вложения $f: U \to M$, $g: B \to M$.

Теория T обладает свойством амальгамы, если для любых моделей U, B_1, B_2 теории T и изоморфных вложений $f_1 : U \to B_1$, $f_2 : U \to B_2$ существуют такие $M \models T$ и изоморфные вложения $g_1 : B_1 \to M$, $g_2 : B_2 \to M$, такие что $g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2$.

Следующие теории являются примерами йонсоновских теорий:

1) группы;
2) абелевы группы;
3) булевы алгебры;
4) линейные порядки;
5) поля характеристики p (p — простое число либо нуль);
6) упорядоченные поля.

Из этих примеров видно, насколько широка область применения данной проблематики в различных разделах математики.

Рассмотрим теорию T счетного языка первого порядка L.

Следующий результат является главным при описании теоретико-модельных свойств совершенных йонсоновских теорий.

Теорема 4. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) T совершенна;
2) T^* — модельный компаньон T;

Определение 2. Пусть T — йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T называется такая теория $T^\#$ той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;
2) для любой йонсоновской теории T', если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$;
3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^\#$ являются T^*, T^0, T^f, T^M, T^e, где T^0-компаньон есть оболочка Кайзера; T^*-компаньон есть центр; T^M-компаньон есть модельный компаньон; T^f-компаньон есть конечный форсинг-компаньон в смысле Робинсона; T^e-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Факт 1. Для любой йонсоновской теории T эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T^* модельно полна.

Факт 2. Для любой полной для $\exists$-предложений йонсоновской теории T эквивалентны следующие условия:

1) T^* модельно полна;

2) для каждого $n < \omega$ $E_n(T)$ — булева алгебра, где $E_n(T)$ есть решетка $\exists$-формул с n свободными переменными.

Теорема 3. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) $T^* - \forall\exists$-аксиоматизируема.

Теорема 4. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) $T^* = T^0$.

Теорема 5. Пусть T — йонсоновская теория. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T совершенна;

2) T имеет модельный компаньон.

Следующие леммы есть лёгкий результат применения указанных выше теорем.

Лемма 1. Если $T^\#$ — компаньон йонсоновской теории T и T^M — модельный компаньон T, то $T^\# = T^M$.

Лемма 2. Пусть T_1 и T_2 — йонсоновские теории. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T_1 и T_2 взаимно модельно совместны;

2) $T_1^\# = T_2^\#$.

Хорошо известно, что, работая с йонсоновскими теориями, в некоторых случаях мы имеем возможность ограничить себя экзистенциальными формулами и экзистенциально-замкнутыми моделями рассматриваемой йонсоновской теории. В этом случае вместо алгебр Линденбаума-Тарского $F_n(T)$, $n \in \omega$, следует рассматривать решетки экзистенциальных формул $E_n(T)$, $n \in \omega$. Таким образом, указанный выше вопрос А.Д.Тайманова можно сформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки E_n, $n \in \omega$, чтобы существовала йонсоновская теория T, такая что E_n была изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$?

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для йонсоновской теории T, если существует такая последовательность решеток E_n, $n \in \omega$, что E_n изоморфна $E_n(T)$, $n \in \omega$.

В связи с этими вопросами (*), (**) получены следующие результаты.

Следующая часть этой работы посвящена вопросу А.Д.Тайманова в рамках Δ-позитивно мустафинской ($\Delta - M$)-теории.

Напомним следующее *определение*. Теория T называется Δ-позитивно мустафинской ($\Delta - M$)-теорией, если в качестве морфизмов рассматриваются только погружения и верны следующие условия:

1) теория T имеет бесконечные модели;

2) теория T является Π^+_{n+2}-аксиоматизируемой;

3) теория T допускает $\Delta - JEP$;

4) теория T допускает $\Delta - AP$.

Сформулируем результат, касающийся вопроса А.Д.Тайманова в рамках указанных выше определений.

Теорема 5. Пусть T — совершенная, полная для экзистенциальных предложений Δ-J-теория языка сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории T^*;

2) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^c, где T^c является центром теории T^*.

Если множество универсальных следствий йонсоновской теории также является йонсоновской теорией (что, вообще говоря, не всегда так), то тогда мы получим следующий результат.

Теорема 6. Пусть T — совершенная, полная для экзистенциальных предложений $\Delta - M$ -теория в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$ и теория $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$ является $\Delta - M$ -теорией, где $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$ — множество позитивных универсально-экзистенциальных предложений преникса длины $\alpha + 2$, выводимых из T^*.

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) положительное решение вопроса (*) относительно теории T^c;

2) положительное решение вопроса (**) относительно теории $T^*_{\Pi^+_{\alpha+2}}$, где T^* является центром теории T.

Все неопределенные в этой статье определения понятий можно прочитать в [2].

Рассмотрим результаты, связанные с понятиями выпуклости теории в классе позитивных робинсоновских теорий. Понятие выпуклости теории было введено в книге А.Робинсона [6] и в дальнейшем развивалось в различных направлениях, особо следует отметить работу [7].

В данной работе мы получаем позитивные аналоги работы [7] в допустимых обогащениях сигнатуры.

Дадим необходимые определения, связанные с позитивностью йонсоновских теорий и обогащением сигнатуры.

Напомним определение, в рамках которого будут рассмотрены все наши вопросы.

Теория T называется йонсоновской, если она:

1) имеет бесконечные модели;

2) индуктивна;

3) обладает свойством совместного вложения (JEP);

4) имеет свойство амальгамы (AP).

Определение 3. Йонсоновская теория T называется совершенной, если каждая семантическая модель T является насыщенной моделью T^*.

Определение 4. Пусть T — йонсоновская теория. Компаньоном йонсоновской теории T называется такая теория той же сигнатуры, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(T^\#)_\forall = T_\forall$;

2) для любой йонсоновской теории T', если $T_\forall = T'_\forall$, то $T^\# = (T')^\#$;

3) $T_{\forall\exists} \subseteq T^\#$.

Естественными интерпретациями компаньона $T^\#$ являются T^*, T^0, T^f, T^M, T^e, где T^* — центр йонсоновской теории T; T^0 — оболочка Кайзера йонсоновской теории T; T^f — форсинг-компаньон йонсоновской теории T; T^M — модельный компаньон теории T; $T^e = Th(E_T)$, где E_T есть класс экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Определение 5. Йонсоновская теория T называется робинсоновской, если она универсально-аксиоматизируема.

Определим Δ -морфизмы между структурами.

Пусть M и N — структуры языка, $\Delta \subseteq B(L^+)$. Отображение $h: M \to N$ называется Δ -гомоморфизмом (символически $h: M \xrightarrow[\Delta]{} N$), если для любого $\varphi(\bar{x}) \in \Delta$, $\forall \bar{a} \in M$ из того, что $M \models \varphi(\bar{a})$, следует, что $N \models \varphi(h(\bar{a}))$.

Модель M называется началом в N, и мы говорим, что M продолжается в N, при этом $h(M)$ называется продолжением M. Если отображение h инъективно, то говорят, что отображение h погружает M в N (символически $h: M \xleftrightarrow[\Delta]{} N$). В дальнейшем мы будем использовать термины Δ

-продолжение и Δ -погружение. В рамках этого определения (Δ -гомоморфизма) легко заметить, что изоморфное вложение и элементарное вложение являются Δ -погружениями, когда $\Delta = B(At)$ и $\Delta = L$ соответственно.

Определение 6. Если C — класс L -структур, то мы говорим, что элемент M из C Δ -позитивно экзистенционально замкнут в C, если каждый Δ -гомоморфизм из M в любой элемент из C является Δ -погружением. Класс всех Δ -позитивно экзистенционально-замкнутых моделей обозначим через $(E_C^{\Delta})^+$; если $C = ModT$ для некоторой теории T, то под E_T, $(E_T^{\Delta})^+$, мы понимаем, соответственно, класс экзистенционально-замкнутых и Δ -позитивно экзистенционально-замкнутых моделей данной теории.

Определение 7. Говорим, что теория T допускает $\Delta - JEP$, если для любых двух $A, B \in ModT$ существуют $C \in ModT$ и Δ -гомоморфизмы $h_1 : A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $h_2 : B \xrightarrow[\Delta]{} C$.

Определение 8. Предположим, что теория T допускает $\Delta - AP$, если для любых $A, B, C \in ModT$ таких, что $h_1 : A \xrightarrow[\Delta]{} C$, $g_1 : A \xrightarrow[\Delta]{} B$, где $h_1, g_1 - \Delta$ -гомоморфизмы, существуют $D \in ModT$ и $h_2 : C \xrightarrow[\Delta]{} D$, $g_2 : B \xrightarrow[\Delta]{} D$, где $h_2, g_2 - \Delta$ -гомоморфизмы, такие что $h_2 \circ h_1 = g_2 \circ g_1$.

Определение 9. Теория T называется Δ -позитивно йонсоновской (Δ -*PJ*) теорией, если она удовлетворяет следующим условиям:

1) T имеет бесконечную модель;
2) T позитивно $\forall\exists$ -аксиоматизируема;
3) T допускает $\Delta - JEP$;
4) T допускает $\Delta - AP$.

Теория T будет называться Δ -йонсоновской (Δ -*J*) теорией, если она Δ -*PJ*-теория, но в качестве морфизмов рассматриваются только Δ -погружения.

Определение 10. Δ -*PJ* — теория называется Δ -позитивной робинсоновской (Δ -*PR*), если она универсально-аксиоматизируема. Теория будет называться Δ -робинсоновской (Δ -*R*), если она Δ -*PR*-теория, но в качестве морфизмов рассматриваются только Δ -погружения.

Пусть $0 \le n \le \omega$. Пусть Π_n^+ — множество всех формул языка L^+ вида $\forall\exists\ldots\varphi$ (то есть формулы из L^+ с n переменами кванторов, начинающихся с $\forall$). Пусть $\Delta \subseteq \Pi_n^+ \subseteq L^+$.

Рассмотрим некоторые специальные обогащения сигнатуры указанных выше теорий. В своё время Т.Г.Мустафин в работе [8] определил новые типы стабильности с помощью некоторых обогащений сигнатуры. Е.А.Палютин в работе [9] показал, что стабильность, определённая как в [8], имеет недостаток в том, что не всякий тип будет определим. А мы знаем, что классическая стабильность сохраняет определимость типа. В связи с этим будем говорить, что обогащение сигнатуры допустимо, если полученные типы при данной стабильности определимы. Заметим, что рассматриваемые обогащения данной статьи сохраняют определимость типа.

Пусть T — произвольная $\Delta - R$ -теория в языке сигнатуры σ. Пусть C — семантическая модель теории T. $A \subseteq C$. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \,|\, a \in A\} \cup \Gamma$, где $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$. Рассмотрим следующую теорию: $T_\Gamma^{PgM}(A) = Th_{\forall^+}(C, a)_{a \in A} \cup \{g(a) = a \mid a \in A\} \cup g(c) \cup T_g \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где T_g выражает тот факт, что для любой модели $(M, g^M) \models T_g$ имеет место:

1) g^M -автоморфизм M;

2) $\{m \in M \,|\, g^M(m) = m\}$ есть универсум некоторой экзистенциально-замкнутой подмодели M для любой модели M сигнатуры σ.

Для предиката P мы записываем выражение $\{"P \subseteq"\}$, что по своей сути есть бесконечное множество предложений, которое говорит, что интерпретация символа P есть позитивно экзистенциально-замкнутая подмодель в сигнатуре σ. В силу неполноты мы не записываем точную связь между элементами $\Gamma = \{g\} \cup \{c\} \cup \{P\}$, но предполагается их согласованность в рамках теории $T_\Gamma^{PgM}(A)$.

Эта теория необязательно полная. Рассмотрим все пополнения центра T^* теории T в новой сигнатуре σ_Γ, где $\Gamma = \{c\}$. В силу $\Delta - M$ -ности теории T^* существует её центр, и мы обозначим его как

T^c. При ограничении T^c до сигнатуры σ теория T^c становится полным типом. Этот тип мы назовём центральным типом теории T.

Определение 11. Теория T называется выпуклой, если для любой ее модели $\mathfrak{A}$ и для любого семейства $\{\mathfrak{B}_i | i \in I\}$ ее подструктур, которые являются моделями теории T, пересечение $\bigcup_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ есть модель теории T. При этом предполагается, что это пересечение не пусто. Если это пересечение никогда не пусто, то теория называется сильно выпуклой.

Определение 12. Если теория сильно выпукла, то пересечение всех ее моделей содержится в некоторой ее модели.

Эта модель называется ядерной моделью этой теории.

Определение 13. Модель сигнатуры данной теории (в дальнейшем структура) называется ядерной, если она изоморфна единственной подструктуре каждой модели данной теории.

В рамках указанных выше определений в обогащенной сигнатуре мы имеем следующие результаты.

Пусть $\Delta = B^+(At)$.

Предположение о некоторой полноте рассматриваемой теории необходимо в связи со следующим фактом.

Лемма 3. В случае позитивной робинсоновской теории из позитивной экзистенциальной полноты следует $\Delta - JEP$, обратное неверно.

Теорема 7. Пусть теория T–Δ-R — совершенная йонсоновская сильно выпуклая теория, и она позитивно экзистенциально полна.

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) теория T^* имеет ядерную структуру;

2) теория T^c имеет ядерную модель.

Всякий раз, когда $\varphi(x)$ есть экзистенциальная формула и выводима в T, существует некоторая экзистенциальная формула $\psi(x)$ и целое число n такие, что в T выводимо $\exists^{=n} x\varphi \wedge \exists x(\varphi \wedge \psi)$, а также, если $T \vDash (\delta_1 \vee \delta_2)$, где δ_1, δ_2 — некоторые экзистенциальные предложения, тогда $T \vDash \delta_1$ или $T \vDash \delta_2$.

Теорема 8. Пусть теория T–Δ-R — сильно выпуклая теория, и она совершенная йонсоновская, причем позитивно экзистенциально полна.

Тогда $\mathfrak{M}$ является ядерной структурой T^* тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ является ядерной моделью центра T^* в указанном выше обогащении.

Следующие результаты имеют отношение к описанию «малых» моделей в классе экзистенциально-замкнутых моделей выпуклых позитивных йонсоновских теорий. Под «малыми» мы понимаем счетные алгебраически простые и счетные специальные атомные модели в смысле работы [10]. При этом специальность атомности определяется работой [10], а позитивность — формулами из Δ.

Мы имеем результат относительно синтаксического условия атомности и семантического понятия Δ-*nice* в классе E_T теории со следующим условием.

Теорема 9. Пусть теория T–Δ-R — совершенная, почти замкнутая йонсоновская, сильно выпуклая теория, и она полна для позитивных $\forall\exists$ предложений. $\mathfrak{A}$ — некоторая счетная модель из E_T.

Тогда эквивалентны следующие условия:

1) $\mathfrak{A}$-(Δ, Δ) атомная;

2) $\mathfrak{A} \in E_T$ и Δ-*nice.*

Предположим, что теория T допускает R_1^+, если для любой позитивно экзистенциональной формулы $\varphi(\bar{x})$, совместной с T, существует формула $\psi(\bar{x}) \in \Delta^+$, совместная с T, такой что $T \models \psi \leftrightarrow \varphi$.

Счетная модель теории T называется счетно-алгебраически универсальной моделью, если в неё Δ-погружаются все счетные модели данной теории.

Модель A является Δ-алгебраически простой моделью теории T, если A является моделью теории T и A может быть Δ-погружена в каждую модель теории T.

Как следствие можно получить следующие результаты относительно Δ-J-теории.

Теорема 10. Пусть $T - \Delta$-R-теория, полная для позитивных экзистенциональных предложений, имеющая счетно алгебраически универсальную модель. Тогда T имеет Δ-алгебраически простую модель, которая (Σ, Δ^+)-атомная.

Теорема 11. Пусть $T - \Delta$ -R-теория, полная для позитивно экзистенциональных предложений, допускающая R_1. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T имеет Δ -алгебраически простую модель;

2) T имеет (Σ, Δ^+) -атомную модель;

3) T имеет единственную Δ -алгебраически простую модель.

Пусть $A, B \in (E_T)^+$ и $A \underset{\neq}{\subset} B$. Тогда B называется Δ -алгебраически простым модельным расширением A в $(E_T)^+$, если для любой модели $C \in (E_T)^+$ из того, что A Δ -погружается в C, следует, что B Δ -погружается в C.

Теорема 12. Пусть $T - \Delta$ -R-теория, полная для позитивных экзистенциональных предложений, для которой выполняется R_1^+ и $\Delta = B(At)$. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) T^* ω_1 -категорична;

2) любая счетная модель из $(E_T)^+$ имеет Δ -алгебраически простое модельное расширение в $(E_T)^+$.

Актуальность данных исследований, прежде всего, связана с тематикой изучения теоретико-модельных свойств универсальных йосоновских алгебр. То есть таких примеров алгебр, которые удовлетворяют условиям Йонсона. И, как правило, таких примеров в алгебре достаточно много. Помимо этого в последнее время возрос интерес к изучению теоретико-модельных свойств неполных теорий. В связи с этим тематика изучения йонсоновских теорий, как естественного подкласса индуктивных теорий, является очень интересной и актуальной задачей. Интерес и актуальность связаны прежде всего с тем, что техника изучения неполных теорий не так развита, как полных и, соответственно, получение любого результата в данной области можно считать продвижением вперед.

Все необходимые определения понятий, но неопределенные непосредственно в статье, можно найти в [2].

Список литературы

1 *Itay Ben-Yaacov.* Positive model theory and compact abstract theories // Journal of Mathematical Logic. — 2003. — Vol. 3. — № 1. — P. 85–118.

2 *Ешкеев А.Р.* Йонсоновские теории. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2009. — 250 с.

3 *Сикорский Р.* Булевы алгебры. — М.: Наука, 1969. — 376 с.

4 *Мустафин Т.Г.* О булевых алгебрах теорий // Математика и физические исследования. — Вып. 1. — Караганда: Изд. КарГУ, 1974. — С. 80–84.

5 Справочная книга по математической логике: В 4 ч. // Под ред. Дж. Барвайса. — Ч. 1. — Теория моделей / Пер. с англ. — М.: Наука, 1982. — 126 с.

6 *Robinson A.* Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra. — Amsterdam, 1963.

7 *Kueker D.W.* Core structures for theories // Fundamenta Mathematicae LXXXIX. — 1975. — P. 154–171.

8 *Мустафин Т.Г.* Новые понятия стабильности теорий: Сб. тр. сов.-фр. коллоквиума по теории моделей. — Караганда, 1990. — С. 112–125.

9 *Палютин Е.А.* E^* -стабильные теории // Алгебра и логика. — 2003. — Вып. 42, № 2. — С. 194–210.

10 *Baldwin J.T., Kueker D.W.* Algebraically prime models // Ann. Math. Logic. — 1981. — С. 289–330.

А.Р.Ешкеев, О.И.Ульбрихт, Р.М.Оспанов

Сигнатураның рұқсат етілген байытуларындағы кейбір позитивті йонсондық теориялардың центр модельдерінің және централдық типтің қасиеттері

Мақаланың негізгі мақсаты — сигнатураның кейбір байытуында Δ -R кемел қатты дөңес теориялардың ядролық құрылымын жазып шығару және А.Д.Таймановтың йонсондық позитивті теориясы үшін қойған сұрақтарына жауап іздеу. Позитивті робинсондық теориялардың алгебралық жай және атомдық модельдері зерттелді. Олар үшін саналымсыз категориялылығының критерийі берілген. Бұл анықтамалар аясында А.Д.Таймановтың сұрағының оңды шешімі централдық типтер және центр үшін бірдей екендігі көрсетілген.

A.R.Yeshkeyev, O.I.Ulbrikht, R.M.Ospanov

Properties of models of a center and central type of some positive Jonsson theories in an allowed enrichment of signatures

The main purpose of this paper is to describe the structure of the core models of strongly convex Δ -*R*-perfect theories in a certain enrichment of the signature and consideration by question A.D. Taimanov for positive Jonsson theories. We study the algebraically simple and atomic models of positive Robinson's theories. For them, a criterion is given uncountable categorical was found. Under the terms set out have shown that a positive solution to the issue A.D. Taimanov is the same as for the central type of such a theory, and for the center of this theory.

References

1 Itay Ben-Yaacov. *Journal of Mathematical Logic*, 2003, 3, 1, p. 85–118.

2 Yeshkeyev A.R. *Jonsson theory*, Karaganda: Publ. KarGU, 2009, p. 250.

3 Sikorski R. *Boolean algebra*, Moscow: Nauka, 1969, p. 376.

4 Mustafin T.G. *Mathematics and physics research*, Karaganda: Publ. KarGU, 1974, 1, p. 80–84.

5 *Handbook of mathematical logic: In 4 parts*, Ed. by Dzh. Barvaysa, Ch. 1, Model Theory / English Transl., Moscow: Nauka, 1982, p. 126.

6 Robinson A. Introduction to Model Theory and to the Metamathematics of Algebra, Amsterdam, 1963.

7 Kueker D.W. *Core structures for theories*, Fundamenta Mathematicae LXXXIX, 1975, p. 154–171.

8 Mustafin T.G. *Proceedings of the Soviet-French symposium on model theory*, Karaganda, 1990, p. 112–125.

9 Palyutin E.A. *Algebra and logic*, 2003, 42, 2, p. 194–210.

10 Baldwin J.T., Kueker D.W. *Ann. Math. Logic*, 1981, p. 289–330.

УДК 004.43

С.Ш.Кажикенова, К.В.Мазиева, Е.Г.Шурыгина

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: sauleshka555@mail.ru)

Идеальная лингвоматематическая модель для анализа структуры текста

В статье рассмотрены вопросы изучения текстового материала различных жанров с целью его совершенствования. Показано, что, используя текст в качестве универсальной модели, можно установить те пределы изменчивости, в которых могут осуществляться самоорганизация и развитие лингвистических систем. Путем использования математических расчетов получены значения энтропии буквы с учетом одной, двух, трех, четырех, пяти, шести букв текста на русском и казахском языках.

Ключевые слова: моделирование, самоорганизующаяся система, информация, энтропия, лингвосинергетика, формула Шеннона, иерархическая структура, статистический метод, жанр текста, стиль текста, языковой уровень, модель.

Наши исследования обусловлены необходимостью изучения текстового материала различных жанров с целью его совершенствования. Любой текст должен быть стилистически, грамматически, синтаксически оформлен грамотно, без лингвистических погрешностей. Путем использования математических расчетов нами получены значения энтропии буквы с учетом одной, двух, трех, четырех, пяти, шести букв текста на русском и казахском языках.

При определении количества информации рассматривается языковой текст, который состоит из букв, слов, словосочетаний, предложений и т.д. Появление каждой буквы описывается как последовательная реализация определенной системы. Количество информации, передаваемое указанной буквой, равно по абсолютной величине той энтропии (неопределенности), которая характеризовала систему возможных выборов и которая была снята в результате выбора определенной буквы.