If $\overline{q} = \infty$, then

$$\|f\|_{\Lambda_\infty(\overline{\varphi})} = sup_{t_2>0} sup_{t_1>0} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)\varphi_1(t_1)\varphi_2(t_2).$$

Let $\delta > 0$ and $\varphi(t)$ be nonnegative function on$[0, \infty)$. Define a function class C_δ:

$$C_\delta = \{\varphi(t): \quad \varphi(t)t^{-\delta} \ is\ an\ increasing\ function\ and$$
$$\varphi(t)t^{-1+\delta} \ is\ a\ decreasing\ function\}.$$

The class C is defined as follows:

$$C = \bigcup_{\delta>0} C_\delta.$$

Theorem 1. Let $0 < \bar{p}_0 = (p_1^0, p_2^0) < \bar{p}_1 = (p_1^1, p_2^1) < \infty$, $1 \le \bar{q} = (q_1, q_2) \le \infty, \gamma_i = \frac{1}{p_i^0} - \frac{1}{p_i^1}$, $i = 1{,}2, \varphi_1, \varphi_2 \in C$. Then the following inequality is true

$$(L_{\bar{p}_0}, L_{\bar{p}_1})_{\bar{\varphi},\bar{q}} = \Lambda^{\bar{q}}(\bar{\psi}),$$

where $\bar{\psi}(t_1, t_2) = \left(\frac{t_1^{\frac{1}{p_1^0}}}{\varphi_1(t_1^{\gamma_1})}, \frac{t_2^{\frac{1}{p_2^0}}}{\varphi_2(t_2^{\gamma_2})}\right).$

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (grant no. AP14870758).

References

1. Nursultanov E.D. On the coefficients of multiple Fourier series from L_p-spaces // *Izv. Math.* – 2000. – Vol. 64, № 1. – P. 95–122.
2. Nursultanov E.D. Interpolation theorems for anisotropic spaces and their applications// *DokladyAkademiiNauk*, 2004. – T. 394, № 1. – C.22-25.
3. Persson L.-E. Interpolation with a parameter function // *Math. Scand.* – 1986. – Vol. 59, № 2. – P. 199–222.

ON THE CONVOLUTION OPERATOR IN LEBESGUE AND MORREY SPACES

Nursultanov E.D.
Kazakhstan branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov,
Nur-Sultan, Kazakhstan
E-mail:er-nurs@yandex.ru

Annotation. This paper is devoted to the study of upper bounds for the norm of the convolution operator in Morrey spaces. Upper and lower estimates for the norm of the convolution operator in the Lebesgue space are given. The upper bound refines the classical O'Neill inequality. Young-O'Neil type inequalities in Morrey spaces are proved. New results on the boundedness of Riesz's potential in Morrey spaces are established.

О ВЛОЖЕНИИИ ПРОСТРАНСТВА ОБОБЩЕННЫХ ДРОБНО-МАКСИМАЛЬНЫХ ФУНКЦИИ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО-ИНВАРИАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Бокаев Н. А., Әбек А.Н.
Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, Казахстан
E-mail:bokayev2011@yandex.ru,azhar.abekova@gmail.com

В данной работе вопрос о вложении пространства обобщенных дробно-максимальных функции в перестановочно-инвариантные пространства сводится к вложению соответствующего конуса в другое перестановочно-инвариантное пространство.

Пусть f^* невозрастающая перестановка функции f и $f^{**}(t)=\frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(\tau)d\tau;\quad t\in R_+$.

Пусть $X(\mathbb{R}^n)$ функциональное пространство снабженное функциональной нормой $\rho(f)$ [1]. Функциональная норма $\rho(f)$ называется перестановочно-инвариантной, если

$$f^*\le g^*\Rightarrow \rho(f)\le\rho(g).$$

Банахово функциональное пространство (БФП) $X=X(\rho)$, порожденное, перестановочно-инвариантной функциональной нормой (ФН) ρ, называется перестановочно-инвариантным пространством (сокращенно: ПИП).

Через $\tilde{X}(\mathbb{R}_+)$ обозначим представление Люксембурга $\|f\|_{X(\mathbb{R}^n)}=\|f\|_{\tilde{X}(\mathbb{R}_+)}$.

Определение 1. Пусть $R\in(0,\infty]$. Функция $\Phi:(0,R)\to R_+$ принадлежит классу $B_n(R)$ если выполняются следующие условия:

(1) Φ убывает и непрерывна на $(0,R)$;

(2) Существует константа $C\in R_+$ такая, что

$$\int\limits_0^r \Phi(\rho)\rho^{n-1}d\rho\le C\Phi(r)r^n,\ r\in(0,R).$$

Определение 2. Пусть $\Phi:R_+\to R_+$ и пусть $E(\mathbb{R}^n)$ ПИП. Обобщенная дробно-максимальная функция $M_\Phi f$ для функции $f\in E(R^n)\cap L_1^{loc}(R^n)$ определяется следующим равенством

$$(M_\Phi f)(x)=\sup_{r>0}\Phi(r)\int\limits_{B(x,r)} f(y)dy,$$

где $B(x,r)$ представляет собой шар с центром в точке x и радиусом r. То есть рассмотрим оператор $M_\Phi:L_1^{loc}(R^n)\to L_0(R^n)$.

В случае $\Phi(r)=r^{\alpha-n}$, $\alpha\in(0,n)$ получаем классическую дробно-максимальную функцию $M_\alpha f$ [1]:

$$(M_\alpha f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{r^{n-\alpha}}\int\limits_{B(x,r)}|f(y)|dy.$$

Обозначим через $M_E^\Phi=M_E^\Phi(R^n)$ пространства функций u, для которых существует функция $f\in E(R^n)$ такая, что

$$u(x)=(M_\Phi f)(x),$$

$$\|u\|_{M_E^\Phi}=\inf\left\{\|f\|_E : f\in E(R^n),\ M_\Phi f=u\right\}.$$

Рассмотрим следующий конус убывающих перестановок, снабженный однородным функционалом

$$KM \equiv KM_E^{\Phi} = \left\{ h \in L^{+}(\mathbb{R}_{+}) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau \Phi(\tau^{1/n}) u^{**}(\tau), \ t \in \mathbb{R}_{+}, \ u \in M_E^{\Phi} \right\}$$

$$\rho_{KM_E^{\Phi}}(h) = inf \left\{ \|u\|_{E(\mathbb{R}^n)}, u \in E(\mathbb{R}^n) : h(t) = \sup_{t<\tau<\infty} \tau \Phi(\tau^{1/n}) u^{**}(\tau), \ t \in \mathbb{R}_{+} \right\}$$

Теорема 1.Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Тогда существует положительная константа C, зависящая только от n такая, что

$$(M_{\Phi} f)^{**}(t) \leq C \sup_{t<s<\infty} s\Phi(s^{1/n}) f^{**}(s), \ t \in (0, \infty)$$

для каждой $f \in L_1^{loc}(R^n)$.

Теорема 2. Пусть $\Phi \in B_n(\infty)$. Вложение $M_E^{\Phi}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow X(\mathbb{R}^n)$ эквивалентно вложению $KM_E^{\Phi}(\mathbb{R}_{+}) \mapsto \tilde{X}(\mathbb{R}_{+})$.

Подобные вопросы для пространства обобщенных потенциалов Рисса рассмотрены в [2] и [3].

Список использованной литературы

1. C.Bennett, R.Sharpley, Interpolation of operators. Pure and applied mathematics, Volume 129. Boston, MA: Acad. Press Inc., 1988.
2. Goldman M.L. On the cones of rearrangements for generalized Bessel and Riesz potentials // Complex Variables and Elliptic Equations 55:8-10, 2010, p.817-832.
3. Bokayev N. A., Goldman M. L., Karshygina G. Zh. Cones of functions with monotonicity conditions for generalized Bessel and Riesz potentials. Math.Notes. 2018. Vol. 104, No. 3, pp. 356–373.

ОБ ИНТЕРПОЛЯЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВ ТИПА МОРРИ

Джумабаева Д.Г. Нурсултанов Е.Д.

Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан

E-mail: jamilya_ast@mail.ru

В данной работе рассматриваются анизотропные пространства типа Морри. Свойства пространств Морри и действующие в этих пространствах операторы вызывают большой интерес в последние десятилетия. Методы исследования опираются на интерполяционные свойства этих пространств.

Пусть $k \in \mathbb{Z}$,через G_k обозначим множество всех кубов вида $[0, 2^k)^n + 2^k m, m \in \mathbb{Z}^n$. Пусть $\mathbb{G} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} G_k$, $Q \in G_k$. Множество взаимно не пересекающихся кубов $\mathbb{T} = \{Q\} \subset \mathbb{G}$ будет локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^n$, если $\mathbb{R}^n = \overline{\coprod_{Q\in\mathbb{T}} Q}$ и $|\mathbb{T} \cap G_k| < \infty$.

Теперь пусть $\overline{n} = (n_1, \dots, n_d)$: $n_i \in \mathbb{N}$, $|n| = n_1 + \dots + n_d$, $\overline{k} = (k_1, \dots, k_d)$: $k_i \in \mathbb{Z}$. Обозначим $G_{\overline{k}} = \{Q = Q_1 \times \dots \times Q_d : Q_i \in G_{k_i}, \ i = \overline{1, d}\}$, взаимно не пересекающиеся кубы $\mathbb{T}_i = \{Q_i\} \subset G_{k_i}$ – локальное разбиение пространства $\mathbb{R}^{n_i}$, множества $\mathbb{T}_1, \dots, \mathbb{T}_d$– локальные разбиения пространств $\mathbb{R}^{n_1}, \dots, \mathbb{R}^{n_d}$ соответственно. Семейство взаимно не пересекающихся параллелепипедов $\mathbb{T} = \mathbb{T}_1 \times \dots \times \mathbb{T}_d$ назовем локальным разбиением пространства $\mathbb{R}^{|n|}$.

Рассмотрим вектора $\overline{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_d)$, $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots, p_d)$, $\overline{q} = (q_1, q_2, \dots, q_d)$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $0 < p_i, q_i \leq \infty, i = \overline{1, d}$. Определим локальное пространство Морри $LM_{\overline{p},\overline{q}}^{\overline{\lambda}}(\mathbb{T})$ как множество измеримых функций f для которых