

К.Т.Искаков¹, Ж.О.Оралбекова²¹Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана;²Казахский национальный педагогический университет им. Абая, Алматы (E-mail:oralbekova@bk.ru)

Оптимизационный метод решения обратной задачи для волнового уравнения

Для интерпретации данных георадара предложена математическая модель распространения волн, возмущенных плоской волной, падающей на поверхность. Рассмотрена обратная задача для волнового уравнения. Для решения двумерной обратной коэффициентной задачи использован метод линеаризации. Разработан оптимизационный метод решения обратных линеаризованных задач. Приведены экспериментальные исследования по диагностике взлетно-посадочной полосы коммерческого аэродрома, расположенного на территории Алматинской области РК, с использованием прибора «Георадар Лоза-1В».

Ключевые слова: обратная коэффициентная задача, волновое уравнение, метод линеаризации, оптимизационный метод, георадар.

1. Алгоритм решения обратной двумерной задачи

На основании экспериментальных исследований рассмотрим модель распространения волн, возбужденной плоской волной заданной формы [1]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t).$$

Предположим, что скорость распространения волн в полупространстве $(z, y) \in R_+ \times R^n$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, имеет следующую структуру:

$$c^2(z, y) = c_0^2 + c_1(z, y)$$

и удовлетворяет условиям:

$$1) c_0 \in C^2(\bar{R}_+), \quad c_0'(0) = 0;$$

$$2) 0 < M_1 \leq c_0(z) \leq M_2, \quad \|c_0\|_{C^2(R_+)} \leq M_3;$$

$$3) c_1(z, y) \text{ отлично от нуля в области } (z, y) \in (0, h) \times K_n(D_1), \text{ где}$$

$$K_n(D_1) = \{y \in R^n; |y_j| < D_1, j = \overline{1, n}\};$$

$$4) c_1(z, y) \in C^2((0, h) \times K_n(D_1)), \quad \alpha = \|c_1\|_{C^2((0, h) \times K_n(D_1))}, \quad \alpha \leq M_1.$$

В силу этих предположений, время пробега волны на глубину h определяется как $T_h = 2h(M_1 - \alpha)^{-1}$. Тогда обратную задачу об определении $c^2(z, y)$ находим из соотношений

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2(z, y) \Delta_{z,y} u(z, y) \in (0, h) \times K_n(D), \quad t \leq T_h; \\ u|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = r_0 \delta(t); \\ u|_{y_j = D} = u|_{y_j = -D}, \quad z \in (0, h), t \leq T_h \end{cases} \quad (1)$$

по известной дополнительной информации

$$u|_{t=0} = f(y, t), \quad y \in K_n(D), \quad t \in (0, T_h).$$

Используем метод линеаризации, учитывая малость α , представим решение граничной задачи (1) в виде

$$u(z, y, t) = u_0(z, t) + u_1(z, y, t),$$

где $u_0(z)$ — решение следующей граничной задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t} u_0 = c_0^2(z) \frac{\partial^2}{\partial t} u_0, z \in R_+, t \in R_+; \\ u_0|_{t<0} = 0, \frac{\partial^2}{\partial t} u_0|_{z=0} = r_0 \delta(t), \end{cases} \quad (2)$$

а $u_1(z, t)$ есть решение задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t} u_1 = c_0^2(z) \Delta_{z,y} u_1 + c_1 \frac{\partial^2}{\partial t} u_0, (z, y) \in (0, h) \times K_n(D), t \leq T_h; \\ u_1|_{t<0} = 0, \frac{\partial^2}{\partial t} u_1|_{z=0} = 0; \\ u|_{\partial K_n(D)=0} = 0, z \in (0, h), t \leq T_h. \end{cases} \quad (3)$$

Дополнительная информация для задач (2), (3) имеет вид:

$$u_0|_{z=0} = \hat{f}(y, t), t \in (0, T_h); \quad (4)$$

$$u_1|_{z=0} = g(y, t), y \in K_n(D), t \in (0, T_h). \quad (5)$$

Таким образом, для решения исходной обратной задачи (1) поступаем следующим образом:

1⁰. Решаем обратную задачу (2), (4) об определении $c_0^2(z)$.

2⁰. Решаем прямую задачу (3) на глубину h и находим $\frac{\partial^2}{\partial t} u_0$.

3⁰. Решаем обратную задачу (3), (5) об определении $c_1(z, y)$ по заданным $\frac{\partial^2}{\partial t} u_0, g(y, t)$.

Для решения обратных задач используем оптимизационный метод [2; 194–206].

Пусть $q(z)$ — приближенное решение обратной задачи (2), (4).

Рассмотрим функционал навязки:

$$J_1(q) = \int_0^{T_h} [u_0(0, t; q) - u_0(0, t; c_0)]^2 dt. \quad (6)$$

Для минимизации функционала применим метод наискорейшего спуска [3]:

$$q^{(n+1)}(z) = q^{(n)}(z) - \alpha_n \nabla J_1(q^{(n)}).$$

Здесь α_n — коэффициент спуска, а градиент функционала (6) вычисляется по формуле

$$\nabla J_1(q^{(n)}) = \int_0^{T_h} \psi(z, t; q^{(n)})(u_0)_{zz} dt,$$

где $\psi(z, t; q^{(n)})$ — решение соответствующей сопряженной задачи [2; 194–206].

Обозначим уже известное выражение на этапе 2 через $Q(z, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial t} u_0$ и запишем оптимизационный метод об определении приближенного решения $p(z, t)$ задачи (3), (5), тогда

$$p^{(n+1)}(z, t) = p^{(n)}(z, t) - \alpha_n \nabla J_2(p^{(n)}).$$

Здесь градиент для функционала $J_2(p^{(n)}) = \int_0^{T_h} [u_1(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t)]^2 dt$ имеет вид

$$\nabla J_2(p^{(n)}) = \int_0^{T_h} [\varphi(z, y, t; p^{(n)}) \cdot Q(z, y, t)] dt,$$

где $\varphi(z, y, t; p^{(n)})$ есть решение сопряженной задачи:

$$\frac{\partial^2}{\partial t} \varphi = q(z) \Delta_{z,t} \varphi + p(z, t) Q(z, t), (z, y) \in (0, h) \times K_n(D), t \in [T_h, 0];$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 \Big|_{t=T_h} &= 0, \quad \varphi_{1t} \Big|_{t=T_h} = 0; \\ \varphi \Big|_{\partial K_n(D)} &= 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in T_h; \\ \varphi_z \Big|_{z=0} &= 2 \left[u_1(0, y, t; p^{(n)}) - g(y, t) \right]. \end{aligned}$$

2. Постановка задачи и данные экспериментальных исследований

Постановка задачи состояла в следующем: выявление внутренней структуры строения участка взлетно-посадочной полосы (с явным дефектом), представленной на рисунке 1. Обследование структуры грунта на предмет обнаружения причин дефекта поверхности полосы. Постановка задачи требует применения неразрушающего метода, дающего представление о состоянии грунта, расположенного под рабочим покрытием полосы.



Рисунок 1. Взлетно-посадочная полоса и георадар

Экспериментальное исследование состояло из следующих частей: описание объекта и его физического состояния; схема разметки участка полосы для проведения георадарных измерений; данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования были выполнены геофизическим комплексом «Лоза-1В»: с использованием антенны 100 см (100 МГц), шаг по профилю — 10 см по первой трассе (отмечен на рис. 2 сверху) и с использованием антенны 150 см (150 МГц) с шагом 20 см по второй трассе, на рисунке 2 он указан ниже.

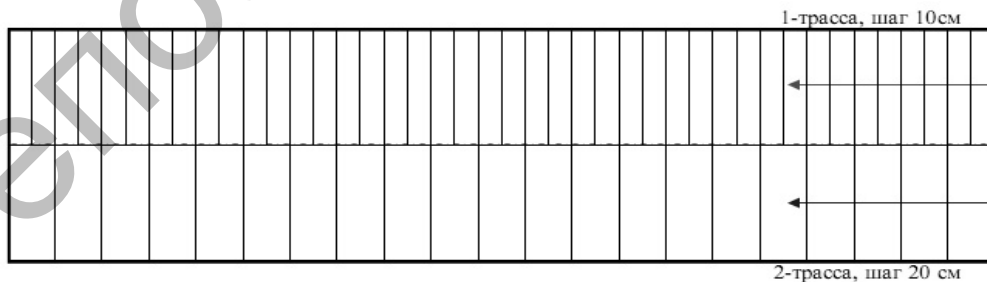


Рисунок 2. Схема трасс (эксперимент 1)

На рисунках 3, 4 показаны профили трасс после применения низкочастотного фильтра, сглаживающего осцилляции вдоль трассы.

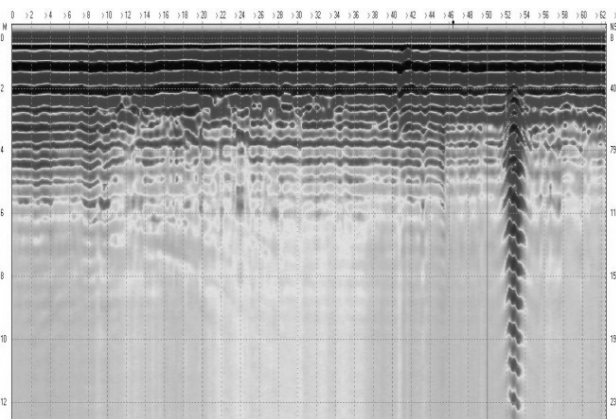


Рисунок 3. Обработка профиля низкочастотным фильтром (первая трасса)

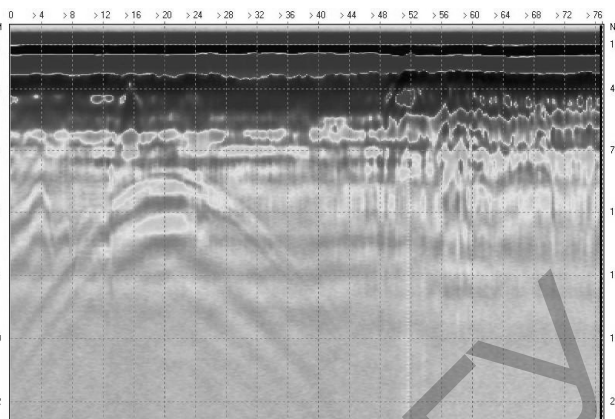


Рисунок 4. Обработка профиля низкочастотным фильтром (вторая трасса)

На рисунках 3, 4 цифры слева направо по оси абсцисс — это координаты в метрах, измеренные вдоль профиля, вертикальная шкала справа — время регистрации сигнала приемной антенной в нс.

Картинки радарограмм визуально похожи на возмущения поверхности, созданной плоской волной, падающей на поверхность. Представим, что мы одновременно возмутили среду источниками, помещенными во всех точках трассы (которые на самом деле мы проходили последовательно, одна за другой). То есть как будто мы одновременно включили столько установок, сколько точек измерения было на трассе. Такое одновременное возмущение многими источниками можно трактовать как возмущение поверхности среды плоской волной, падающей на поверхность.

Если на пути волн имеются непроницаемые препятствия, волны их огибают и возникают куполообразные волновые картины (рис. 4), похожие на волновую картину, образующуюся за выступающим, например, из воды камнем.

Если препятствия представляют собой нечто вроде ворот, то волна проходит в ворота, а за стенами наблюдается штиль. На рисунке 3 интервал на расстоянии 52–54 м от начала координат — нечто вроде «ворот». Эти соображения и позволили нам сделать выводы о наличии «трубы» — непроницаемого для электромагнитных колебаний препятствия. Результаты экспериментальных и теоретических исследований, выполненных в соавторстве с профессорами С.И.Кабанихиным и Б.Г.Муқановой, были доложены на международных конференциях [4–7].

Повторные экспериментальные исследования на указанном выше объекте (рис. 5) проведены руководителем службы безопасности полетов аэродрома полковником Б.Кулназаровым и Ж.О.Оралбековой.



Рисунок 5. Взлетно-посадочная полоса и георадар (эксперимент 2)

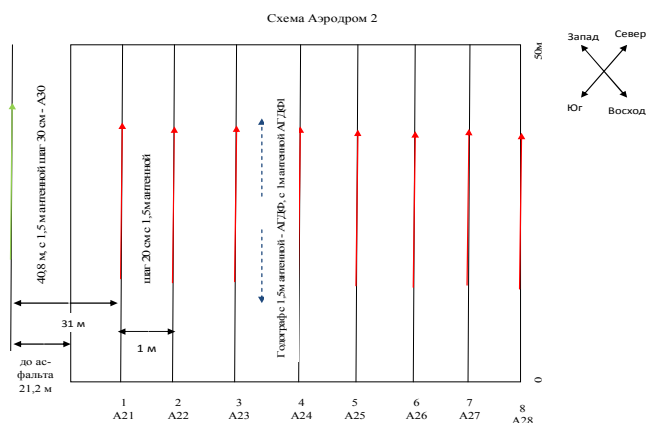


Рисунок 6. Схема трасс (эксперимент 2)

Экспериментальная часть исследования состояла из следующих блоков: описание объекта и его физического состояния; новая схема разметки участка полосы для проведения георадарных измере-

ний (рис. 6); данные геологических профилей исследуемых объектов; экспертное заключение по диагностике (дефекта) исследуемого объекта.

Экспериментальные исследования выполнены геофизическим комплексом «Лоза-1В», с использованием антенны 100 см (100МГц), шаг по профилю 10 см, и с шагом 20 см по трассам, отмеченным на рисунке 6.

Данные георадарных экспериментальных исследований объекта представлены на рисунке 7.

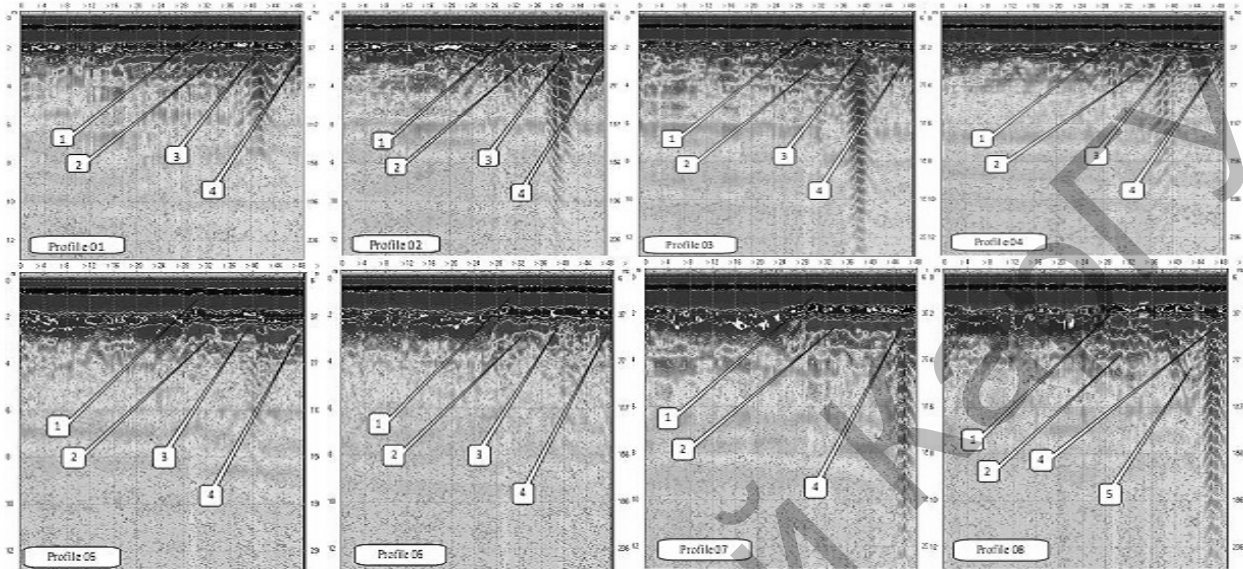


Рисунок 7. Георадарные данные эксперимента 2

Ниже приведена 3D-обработка полученных профилей эксперимента 2:

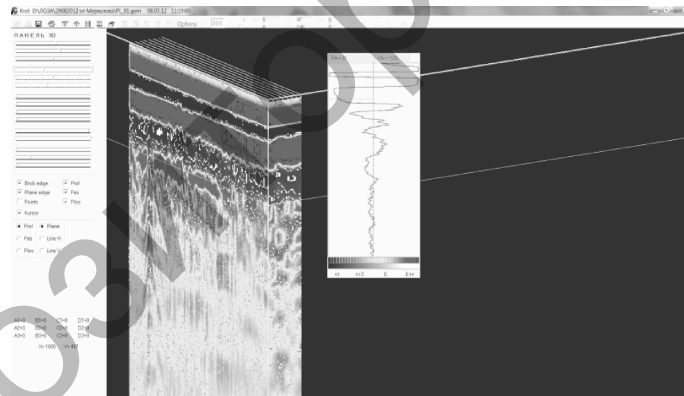


Рисунок 8. 3D-обработка полученных профилей

В результате проведенного анализа приходим к следующему заключению:

- 1 – линейно протяженный объект (трещина, шов, кабель...);
- 2 – плотный слой грунта (глина, подсыпка гравия с крупным камнем...);
- 3 – железобетонный лоток (дренаж, трубы...);
- 4 – железобетонный лоток (дренаж, трубы...);
- 5 – яма, старое русло ручья...

Замечание. В случае проведения экспериментальных измерений, параллельных вдоль предполагаемого исследуемого объекта, как видно из заключения, мы получаем более подробную картину об исследуемом дефекте поверхности аэродрома. Как показало экспериментальное исследование, необходимо проведение двух этапов эксперимента, поскольку на первом выявляется предполагаемый объект, а на втором — вокруг этого объекта нужно провести тщательные измерения.

Работа поддержана грантом МОН РК (№ 2217/ГФЗ).

Список литературы

- 1 *Кабанихин С.И.* Проекционно-разностные методы определения коэффициентов гиперболических уравнений. — Новосибирск: Наука, 1988. — С. 131–134.
- 2 *Кабанихин С.И., Искаков К.Т.* Оптимизационные методы решения коэффициентных обратных задач. — Новосибирск: Изд. НГУ, 2001. — 315 с.
- 3 *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. — М.: Наука, 1981. — С. 32–40.
- 4 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.* Analysis of the measurements of subsurface coatings using Georadar // The 8 th Congress of International Society for Analysis, its Applications, and Computation (ISAAC-2011). — Moscow, Russia, 22–27 August, 2011. — P. 291–292.
- 5 *Кабанихин С.И., Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О.* Анализ измерений подповерхностных покрытий с использованием георадара // Материалы междунар. конф. «Актуальные проблемы современной математики, информатики и механики. 20 лет Независимости РК». — Алматы, 28–30 сентября 2011 г. — С. 319, 320.
- 6 *Искаков К.Т., Муканова Б.Г., Оралбекова Ж.О.* Применение георадара в задачах идентификации подповерхностных покрытий // Материалы III междунар. науч. шк. конф. «Теория и численные методы решения обратных и некорректных задач». — Новосибирск, 10–15 октября 2011 г. — С. 24, 25.
- 7 *Искаков К.Т., Оралбекова Ж.О.* Обратная задача для волнового уравнения в георадарных исследованиях // Тр. II междунар. науч.-практ. конф. «Информационно-инновационные технологии: интеграция науки, образования и бизнеса», посвящ. 20-летию Независимости Республики Казахстан. — II т. — КазНТУ им.К.И.Сатпаева. — Алматы, 1–2-декабря 2011 г. — С. 357–361.

Қ.Т.Ысқаков, Ж.О.Оралбекова

Толқын теңдеуі үшін кері есепті шешудің оңтайлы әдісі

Георадар мәліметтерін интерпретациялау үшін жазықтыққа түсетін жазық толқынның әсерінен ауытқитын толқын таралуының математикалық моделі ұсынылды. Толқын теңдеуі үшін кері есеп қарастырылды. Екі өлшемді кері коэффициенттік есепті шешу үшін сызықтату әдісі қолданылды. Кері сызықтатылған есепті шешудің оңтайландыру әдісі құрастырылды. «Георадар Лоза-1В» аспабын қолданумен ҚР Алматы облысының аймағында орналасқан жеке меншік аэродромның ұшу-қону жолағын бақылау барысындағы тәжірибелік зерттеулер нәтижелері келтірілді.

K. T. Iskakov, Zh. O. Oralbekova

Optimization method of solving the inverse problem for the wave equation

For interpretation of GPR data the mathematical model of wave propagation, which perturbed by a plane wave incident on the surface is proposed. The inverse problem for the wave equation is considered. For solving the two-dimensional inverse problem the linearization method is used. The optimization method of solving the inverse linearized problem is developed. The experimental researches on the diagnoses of the runway of private airport located on the territory of Almaty in the Republic of Kazakhstan by using georadar (GPR) are presented.

References

- 1 *Kabanikhin S.I.* *Projection-difference methods of determining the coefficients of hyperbolic equations*, Novosibirsk: Nauka, 1988, p. 131–134.
- 2 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T.* *Optimization methods for solving the coefficient inverse problems*, Novosibirsk: Publ. NSU, 2001, 315 p.
- 3 *Vasil'ev F.P.* *Methods for solving extremal problems*, Moscow: Nauka, 1981, p. 32–40.
- 4 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *The 8 th Congress of International Society for Analysis, its Applications and Computation (ISAAC-2011)*, Moscow, Russia, 22–27 August, 2011, p. 291–292.
- 5 *Kabanikhin S.I., Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *International conference «Actual problems of modern mathematics, computer science and mechanics»*, Almaty, 28–30 September, 2011, p. 319, 320.
- 6 *Iskakov K.T., Mukanova B.G., Oralbekova Zh.O.* *Third International Scientific School Conference «Theory and numerical methods for solving inverse and ill-posed problems»*, Novosibirsk, 10–15, October, 2011, p. 24, 25.
- 7 *Iskakov K.T., Oralbekova Zh.O.* *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference «Information Technology and Innovation: Integrating Science, Education and Business»*, dedicated to the 20th anniversary of Independence of the Republic of Kazakhstan, vol. II, Almaty, 1–2 December, 2011, p. 357–361.