

К.Б.Иманбердиев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы

## О КОРРЕКТНОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ–ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ГРАНИЧНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

Соңғы жылдарда агроэкожүйелерді тиімді басқару есептерін қарқынды зерттеулерге байланысты, мысалы, жер қойнауы сулары мен топырақ ылғалдылығының деңгейін ұзақ мерзімге болжау мен реттеу есептерін зерттеу, жүктелген теңдеулерге қызығушылықты елеулі түрде арттырды. Мақалада Соболев кеңістіктеріндегі параболалық типтес сызықты жүктелген теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептердің шешімділігі мәселелері зерттеледі.

For last years in connection with intensive research of optimal control problems for agro-ecological systems, for example, problems of long-term forecasting and regulating of ground-water level and soil moisture, an interest to the loaded equations essentially has increased. In the present article the solvability of initial-boundary problems for linear loaded equations of parabolic type in Sobolev spaces and problems with boundary controls are investigated.

За последние годы в связи с интенсивным исследованием задач оптимального управления агро-экосистемой, например, задач долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги, существенно повысился интерес к нагруженным уравнениям [1, 2]. В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости начально-краевых задач для линейных нагруженных уравнений параболического типа в пространствах Соболева и задач с граничными управлениями [3–5].

**1.1 Постановка задачи.** Введем следующее пространство:

$$Y(0, T) = \{y \mid y \in L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2)), y_t \in L_2(Q)\}$$

и рассмотрим начально-граничную задачу в пространстве  $Y(0, T)$ :

$$y_t(x, t) - y_{xx}(x, t) + \alpha \cdot y(\bar{x}, t) = f, \quad \{x, t\} \in Q, \quad (1.1.1)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad -\pi/2 < x < \pi/2, \quad (1.1.2)$$

$$y(-\pi/2, t) = u_1(t), \quad y(\pi/2, t) = u_2(t), \quad 0 < t < T, \quad (1.1.3)$$

где  $Q = \{x, t \mid -\pi/2 < x < \pi/2, 0 < t < T < +\infty\}$ ,  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  — граничные управляющие функции, а  $f(x, t)$  и  $y_0(x)$  — заданные функции, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} u_j \in U_{jg} \subset L_2(0, T), \quad j=1, 2 - \text{выпуклое замкнутое множество,} \\ y_0(x) \in H^1(-\pi/2, \pi/2), \quad f(x, t) \in L_2(Q), \\ \bar{x} \in (-\pi/2, \pi/2), \quad \alpha = \text{const} \in \mathbb{C}. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

На решениях задачи (1.1.1)–(1.1.3) при выполнении (1.1.4) задан функционал

$$J[u_1, u_2] = \|y(x, T) - \gamma(x)\|_{H^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \sum_{j=1}^2 \beta_j \int_0^T u_j^2(t) dt, \quad (1.1.5)$$

где  $\beta_j \in \mathbb{R}_+^1$ ,  $j=1, 2$ ,  $\gamma(x) \in H^1(-\pi/2, \pi/2)$  — заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в следующем: требуется найти граничные управления  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  и соответствующие им решения  $y(x, t)$  граничной задачи (1.1.1)–(1.1.3), удовлетворяющие условиям (1.1.4) и минимизирующие функционал (1.1.5). Для решения поставленной задачи оптимального управления необходимо, прежде всего, изучить следующий вопрос: исследовать существование и единственность решения краевой задачи (1.1.1)–(1.1.3) при любых допустимых управлениях  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  из (1.1.4). Этому вопросу посвящена данная работа.

**1.2 Существование решения граничной задачи для нагруженного уравнения теплопроводности.** Сформулируем основной результат этого подраздела.

**Теорема 1.2.1.** При любых  $\{y_0(x), f(x, t), u_1(t), u_2(t)\}$ , удовлетворяющих условиям (1.1.4), задача (1.1.1)–(1.1.3) имеет единственное решение  $y(x, t) \in Y(0, T)$ . Более того, это решение непрерывно зависит от исходных данных, т.е. линейное отображение  $\{y_0(x), f(x, t), u_1(t), u_2(t)\} \rightarrow y(x, t)$  прямого произведения пространств

$$H^1(-\pi/2, \pi/2) \times L_2(Q) \times L_2(0, T) \times L_2(0, T)$$

в пространство  $Y(0, T)$  непрерывно.

**Доказательство теоремы 1.2.1.** Согласно теоремам о следах и поднятии [6] существует функция  $w(x, t) \in Y(0, T)$ , для которой справедливы равенства:  $w(-\pi/2, t) = u_1(t)$ ,  $w(\pi/2, t) = u_2(t)$ . Поэтому решение задачи (1.1.1)–(1.1.3) можно искать в виде следующего представления:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + w(x, t),$$

где  $y_1(x, t)$  — новая неизвестная функция. Подставляя это представление в (1.1.1)–(1.1.3), получим следующую задачу с нулевыми граничными условиями:

$$y_{1t}(x, t) - y_{1xx}(x, t) + \alpha \cdot y_1(\bar{x}, t) = f_1(x, t), \quad (1.2.1)$$

$$y_1(x, 0) = y_{10}(x), \quad (1.2.2)$$

$$y_1(-\pi/2, t) = y_1(\pi/2, t) = 0, \quad (1.2.3)$$

где

$$\begin{cases} f_1 = f - w_t + w_{xx} - \alpha \cdot w(\bar{x}, t) \in L_2(Q), \\ y_{10}(x) = y_0(x) - w(x, 0) \in H_0^1(-\pi/2, \pi/2), \end{cases} \quad (1.2.4)$$

так как согласно [4] имеем:

$$\begin{cases} w_t(x, t) - w_{xx}(x, t) \in L_2(Q), \\ w(\bar{x}, t) \in L_2(0, T), w(x, 0) \in H^1(-\pi/2, \pi/2). \end{cases}$$

Сперва докажем теорему о существовании и единственности решения (1.2.1)–(1.2.3) для заданной функции  $w(x, t) \in Y(0, T)$ . Для этого введем следующее пространство:

$$Y_1(0, T) = \{y_1 \mid y_1 \in L_2(0, T); H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2), y_{1t} \in L_2(Q)\}.$$

**Теорема 1.2.2.** При любых  $\{y_{10}(x), f_1(x, t)\}$ , удовлетворяющих условиям (1.2.4), задача (1.2.1)–(1.2.3) имеет единственное решение  $y_1(x, t) \in Y_1(0, T)$ . Более того, это решение непрерывно зависит от исходных данных, т.е. линейное отображение  $\{y_{10}(x), f_1(x, t)\} \rightarrow y_1(x, t)$  прямого произведения пространств  $H_0^1(-\pi/2, \pi/2) \times L_2(Q)$  в пространство  $Y_1(0, T)$  непрерывно.

**Доказательство теоремы 1.2.2. Единственность.** Пусть функция  $y_1(x, t) \in Y_1(0, T)$  есть решение задачи (1.2.1)–(1.2.3) при  $f_1(x, t) = 0$  и  $y_{10}(x) = 0$ . Умножая уравнение (1.2.1) скалярно в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$  на  $-y_{1xx}(x, t)$ , получим:

$$-\left(\frac{\partial y_1}{\partial t}, y_{1xx}\right) + (y_{1xx}, y_{1xx}) - \alpha \cdot (y_1(\bar{x}, t), y_{1xx}) = 0.$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$-\left(\frac{\partial y_1}{\partial t}, y_{1xx}\right) + (y_{1xx}, y_{1xx}) \leq |\alpha| \cdot |(y_1(\bar{x}, t), y_{1xx})|. \quad (1.2.5)$$

Так как  $y_{10}(x) = 0$ , то для любого  $y_1 \in Y_1(0, T)$  имеет место равенство

$$-\int_0^t \left(\frac{\partial y_1}{\partial t}, y_{1xx}\right) dt = \int_0^t \left(\frac{\partial y_{1x}}{\partial t}, y_{1x}\right) dt = \frac{1}{2} \|y_{1x}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2. \quad (1.2.6)$$

Тогда в силу условия (1.2.3) следуют

$$\begin{aligned} |y_1(\bar{x}, t)| &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right| dx \leq \sqrt{\pi} \left\| \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}, \\ |(y_1(\bar{x}, t), y_{1xx}(x, t))| &\leq |y_1(\bar{x}, t)| \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y_{1xx}(x, t)| dx \leq \sqrt{\pi} |y_1(\bar{x}, t)| \cdot \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq \\ &\leq \pi \cdot \left\| \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \times \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq \left\{ \left\| \frac{\partial y_1(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} = \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{2\varepsilon_1} \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad \varepsilon_1 > 0. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Учитывая соотношения (1.2.6) и (1.2.7), из (1.2.5) получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^t \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{2\varepsilon_1} \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt. \end{aligned}$$

При  $\frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} = 1$ :  $\varepsilon_1 = |\alpha|^2 \pi^2$ , откуда следует:

$$\frac{1}{2} \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \frac{1}{2} \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^t \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt. \quad (1.2.8)$$

Введем обозначение

$$z(t) = \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad z(t) \geq 0.$$

Используя это обозначение, из (1.2.8) получим:

$$z(t) \leq \varepsilon_1 \int_0^t z(\tau) d\tau.$$

Применяя неравенство Гронуолла, откуда получаем  $z(t) \equiv 0$ , т.е. имеет место единственность решения задачи (1.2.1)–(1.2.3). Единственность доказана.

**Существование.** Пусть  $w_1(x), w_2(x), \dots, w_N(x), \dots$  — базис пространства  $H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$ . Приближенное решение задачи (1.2.1)–(1.2.3) определим в виде

$$y_{1N}(x, t) = \sum_{i=1}^N g_{Ni}(t) w_i(x), \quad (1.2.10)$$

где функции  $g_{Ni}(t)$ ,  $i=1, 2, \dots, N$ , подлежащие определению. Потребуем, чтобы функция  $y_{1N}(x, t)$  удовлетворяла уравнению (1.2.1) при замене функции  $f(x, t)$  через  $f_{1N}(x, t)$ . В результате получим:

$$y_{1Ni}(x, t) - y_{1Nxx}(x, t) + \alpha \cdot y_{1N}(\bar{x}, t) = f_{1N}(x, t), \quad (1.2.11)$$

где

$$f_{1N} = \sum_{i=1}^N f_{1i}(t) w_i(x) = \sum_{i=1}^N (f_1(x, t), w_i(x)) \cdot w_i(x).$$

Далее в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$ , скалярно умножая (1.2.11) на  $w_j(x)$ , имеем:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N g'_{Ni}(t) (w_i(x), w_j(x)) + \sum_{i=1}^N g_{Ni}(t) (w'_i(x), w'_j(x)) + \alpha \cdot \sum_{i=1}^N g_{Ni}(t) (w_i(\bar{x}), w_j(x)) = \\ & = \sum_{i=1}^N (f_{1i}(t) \cdot w_i(x), w_j(x)), \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

Соответственно для (1.2.2) получаем:

$$\sum_{i=1}^N g_{Ni}(0) w_i(x) = y_{1N}(x, 0) = y_{10N}(x) = \sum_{i=1}^N \eta_{Ni} w_i(x), \quad (1.2.13)$$

где  $\sum_{i=1}^N \eta_{Ni} w_i(x) \rightarrow y_{10}$  в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Соотношения (1.2.12) и (1.2.13) представляют собой задачу Коши для системы линейных дифференциальных уравнений относительно функций  $g_{Ni}(t)$ :

$$\Delta_N g'_N(t) + W_N g_N(t) = \tilde{f}_{1N}(t), \quad g_N(0) = \{\eta_{Ni}(t)\}, \quad (1.2.14)$$

где

$\Delta_N = \{(w_i(x), w_j(x))\}_{i, j = \overline{1, N}}$  — матрица Грамма,

$$W_N = \{(w'_i(x), w'_j(x)) + \alpha \cdot (w_i(\bar{x}), w_j(x))\}_{i, j = \overline{1, N}}, \quad g_N(t) = \{g_{Ni}(t)\},$$

$$\tilde{f}_{1N}(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N (f_{1i}(t) \cdot w_i(x), w_j(x)), \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^N (f_{1i}(t) \cdot w_i(x), w_N(x)). \end{cases}$$

Так как  $\det \Delta_N \neq 0$ , согласно теореме К.Каратеодори [5] задача (1.2.14) имеет единственное абсолютно непрерывное решение  $g_N(t) \in AC[0, T]$ .

Таким образом, согласно (1.2.10) мы построили последовательность  $\{y_{1N}(x, t)\}_{N=1}^{\infty}$ . Теперь, скалярно в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$  умножив (1.2.11) на  $g_{Nj}(t)$  и суммируя результат по  $j$ , получим:

$$\left( \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial t}, y_{1N}(x, t) \right) + \left( \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x}, \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x} \right) + \alpha \cdot (y_{1N}(\bar{x}, t), y_{1N}(x, t)) = (f_{1N}(x, t), y_{1N}(x, t)).$$

Интегрируя это равенство по  $t$  от 0 до  $t$  и учитывая (1.2.6), имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \|y_{1N}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{2\varepsilon_1} \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \\ & + \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^t \|f_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \frac{1}{2} \|y_{10N}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2, \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

где  $\varepsilon_1 > 0$ ,  $\varepsilon_2 > 0$ . Если выбрать параметр  $\varepsilon_1$  так, чтобы  $\varepsilon_1 = 1$  и обе стороны неравенства умножить на 2, то из (1.2.15) следует:

$$\begin{aligned} & \|y_{1N}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau \leq \\ & \leq \left( \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \right) \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \|y_{10N}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2. \end{aligned}$$

Если ввести обозначение  $z(t) = \|y_{1N}\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2$ , то имеем:

$$1) z(\tau) \leq \left( \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \right) \int_0^t z(\tau) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \|y_{10N}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2,$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^t \|y_{1N}(x, \tau)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau \leq \\ \leq \left( \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \right) \int_0^t z(\tau) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_{1N}(x, \tau)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau + \|y_{10N}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла [5], из этих двух неравенств получаем:

$$1') z(t) \leq C_2 \left[ z(0) + \|f_{1N}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \right] \leq C_1 \left[ \|y_{10}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \right], \quad (1.2.16)$$

где  $z(0) = \|y_{1N}(x, 0)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 \leq \|y_{10}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2$ .

$$\begin{aligned} 2') \int_0^T \|y_{1N}(x, \tau)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 d\tau \leq \\ \leq \left( \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 \right) \cdot C_1 \left[ \|y_{10}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \right] + \frac{1}{\varepsilon_2} \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \|y_{10N}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2, \end{aligned}$$

т.е.,

$$\|y_{1N}(x, t)\|_{L_2(0, T; H_0^1(-\pi/2, \pi/2))}^2 \leq C_2 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \right]. \quad (1.2.17)$$

Неравенствам (1.2.16) и (1.2.17) можно придать вид:

$$\|y_{1N}(x, t)\|_{L_\infty(0, T; L_2(-\pi/2, \pi/2))} \stackrel{\Delta}{=} \text{vraisup}_{0 \leq t \leq T} \|y_{1N}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq C_1 \left[ \|y_{10}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (1.2.18)$$

$$\|y_{1N}(x, t)\|_{L_2(0, T; H_0^1(-\pi/2, \pi/2))} \leq C_2 \left[ \|y_{10}(x)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (1.2.19)$$

Далее, умножая уравнение (1.2.11) скалярно в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$  на  $-y_{1Nxx}(x, t)$ , получим:

$$-\left( \frac{\partial y_{1N}}{\partial t}, y_{1Nxx} \right) + (y_{1Nxx}, y_{1Nxx}) - \alpha \cdot (y_{1N}(\bar{x}, t), y_{1Nxx}) = -(f_{1N}(x, t), y_{1Nxx}).$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$-\left( \frac{\partial y_{1N}}{\partial t}, y_{1Nxx} \right) + (y_{1Nxx}, y_{1Nxx}) \leq |\alpha| \cdot |(y_{1N}(\bar{x}, t), y_{1Nxx})| + |(f_{1N}(x, t), y_{1Nxx})|. \quad (1.2.20)$$

С учетом (1.2.6) для любого  $y_{1N} \in Y_1(0, T)$  имеет место равенство

$$\int_0^t \left( \frac{\partial y_{1Nxx}}{\partial t}, y_{1Nxx} \right) dt = \frac{1}{2} \|y_{1Nxx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 - \frac{1}{2} \|y_{1Nxx}(x, 0)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2. \quad (1.2.21)$$

Тогда в силу условия (1.2.3) следует:

$$\begin{aligned} |y_{1N}(\bar{x}, t)| &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left| \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x} \right| dx \leq \sqrt{\pi} \left\| \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}, \\ |(y_{1N}(\bar{x}, t), y_{1Nxx}(x, t))| &\leq |y_{1N}(\bar{x}, t)| \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |y_{1Nxx}(x, t)| dx \leq \sqrt{\pi} |y_{1N}(\bar{x}, t)| \cdot \|y_{1Nxx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq \\ &\leq \pi \cdot \left\| \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \times \|y_{1Nxx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq \left\{ \left\| \frac{\partial y_{1N}(x, t)}{\partial x} \right\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} = \|y_{1N}(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} \right\} \leq \\ &\leq \frac{\pi^2}{2\varepsilon_1} \|y_{1Nxx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \frac{\varepsilon_1}{2} \|y_{1N}(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad \varepsilon_1 > 0. \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

Учитывая соотношения (1.2.21) и (1.2.22), из (1.2.20) получим:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 + \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon_1}{2} \int_0^t \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{|\alpha|^2 \pi^2}{2\varepsilon_1} \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \\ &+ \frac{\varepsilon_2}{2} \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{1}{2\varepsilon_2} \int_0^t \|f_1(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{1}{2} \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2. \end{aligned}$$

При  $\frac{|\alpha|^2 \pi^2}{\varepsilon_1} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_1 = 2|\alpha|^2 \pi^2$  и  $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ , отсюда следует:

$$\|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 \leq \varepsilon_1 \int_0^t \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_1(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad (1.2.23)$$

$$\int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt \leq \varepsilon_1 \int_0^t \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_1(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2. \quad (1.2.24)$$

Введем обозначение

$$z(t) = \|y_1(x, t)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2, \quad z(t) \geq 0.$$

Используя это обозначение, из (1.2.23) и (1.2.24) получим:

$$\begin{aligned} z(t) &\leq \varepsilon_1 \int_0^t z(\tau) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_1(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2; \\ \int_0^t \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt &\leq \varepsilon_1 \int_0^t z(\tau) d\tau + \frac{1}{\varepsilon_2} \int_0^t \|f_1(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Гронуолла, получаем априорные оценки:

$$z(t) \leq C_3 \left[ \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 \right]; \quad (1.2.25)$$

$$\|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 \stackrel{\Delta}{=} \int_0^T \|y_{1xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}^2 dt \leq C_4 \left[ \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}^2 + \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}^2 \right]. \quad (1.2.26)$$

В силу того, что для приближенного решения  $y_{1N}(x, t)$  уравнения (1.2.10) при каждом  $N$  имеют место априорные оценки вида (1.2.18)–(1.2.19) и (1.2.25)–(1.2.26) и согласно [7–12], из ограниченных последовательностей

$$\{y_{1N}(x, t)\}_{N=1}^\infty \text{ в } L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2))$$

и

$$\{y_{1N}(x, t)\}_{N=1}^\infty \text{ в } L_\infty(0, T; H_0^1(-\pi/2, \pi/2)) \cap C([0, T]; H_0^1(-\pi/2, \pi/2))$$

можно выделить подпоследовательности соответственно

$$\{y_{1\mu}(x, t)\}_{\mu=1}^\infty \text{ такую, что } y_{1\mu} \rightarrow z \text{ слабо в } L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)), \quad (1.2.27)$$

и

$$\{y_{1\mu}(x, t)\}_{\mu=1}^\infty \text{ такую, что } y_{1\mu} \rightarrow z^* \text{ — слабо в } L_\infty(0, T; H_0^1(-\pi/2, \pi/2)). \quad (1.2.28)$$

Из (1.2.19) и (1.2.25) следует

$$\|y_{1N}(\bar{x}, t)\|_{L_2(0, T)} \leq C_2 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (1.2.29)$$

Тогда из ограниченной последовательности  $\{y_{1N}(\bar{x}, t)\}_{N=1}^\infty$  в  $L_2(0, T)$  можно выделить подпоследовательность

$$y_{1\mu}(\bar{x}, t)_{\mu=1}^\infty \text{ такую, что } y_{1\mu}(\bar{x}, t) \rightarrow z(\bar{x}, t) \text{ слабо в } L_2(0, T). \quad (1.2.30)$$

Наша цель — показать, что  $z(x, t)$  из (1.2.27)–(1.2.30) действительно удовлетворяет (1.2.1)–(1.2.3). Пусть теперь  $j$  — произвольное фиксированное число и  $\mu > j$ . Так как равенство (1.2.11) верно при  $N = \mu$ , то, умножая его на функцию  $\phi_j(x, t) = \phi(t) \cdot w_j(x)$ , где  $\phi(t) \in \Phi = \{\phi \mid \phi \in C^1[0, T], \phi(T) = 0\}$ , получаем:

$$(y_{1Nt}(x, t), \phi_j(x, t)) + (y_{1Nx}(x, t), \phi_{jx}(x, t)) + \alpha \cdot (y_{1N}(\bar{x}, t), \phi_j(x, t)) = (f_{1N}(x, t), \phi_j(x, t)). \quad (1.2.31)$$

Далее, интегрируя (1.2.31) по частям от 0 до  $T$  и переходя к пределу при  $N \rightarrow \infty$ , находим:

$$\int_0^T \left[ -(y_{1Nt}(x, t), \phi_{jt}(x, t)) + (y_{1Nx}(x, t), \phi_{jx}(x, t)) + \alpha \cdot (y_{1N}(\bar{x}, t), \phi_j(x, t)) - (f_{1N}(x, t), \phi_j(x, t)) \right] dt = \\ = (y_{1N}(x, 0), \phi(0) \cdot w_j(x)), \quad \forall j = \overline{1, N}. \quad (1.2.32)$$

Это равенство верно для любого  $\phi(t) \in \Phi$ . Поэтому, в частности, оно верно и для функции  $\phi(t) \in D((0, T)) \subset \Phi$ . Таким образом, из (1.2.32) имеем

$$\int_0^T \left[ -(y_{1Nt}(x, t), \phi_{jt}(x, t)) + (y_{1Nx}(x, t), \phi_{jx}(x, t)) + \alpha \cdot (y_{1N}(\bar{x}, t), \phi_j(x, t)) - (f_{1N}(x, t), \phi_j(x, t)) \right] dt = 0, \quad \forall j = \overline{1, N}, \quad (1.2.33)$$

для любого  $\phi(t) \in D((0, T))$  — финитная функция. Справедливо следующее равенство:

$$-\int_0^T \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_{1Nt}(x, t) w_j(x) dx \cdot \phi'(t) dt = \int_0^T \left[ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_{1Nt}(x, t) w_j(x) dx \right] \cdot \phi(t) dt, \quad \forall \phi(t) \in D((0, T)), \quad (1.2.34)$$

где

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_{1Nt}(x, t) w_j(x) dx \in D'((0, T)).$$

Используя (1.2.34), соотношение (1.2.33) запишем в следующем виде:

$$\int_0^T \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_{1Nt}(x, t) - y_{1Nxx}(x, t) + \alpha \cdot y_{1N}(\bar{x}, t) - f_{1N}(x, t)] \cdot w_j(x) dx \right\} \cdot \phi(t) dt = 0, \quad \forall \phi(t) \in D((0, T)), \quad j = \overline{1, N},$$

где

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_{1N_t}(x,t) - y_{1N_{xx}}(x,t) + \alpha \cdot y_{1N}(\bar{x},t) - f_{1N}(x,t)] \cdot w_j(x) dx = 0 \in D'((0,T)) \text{ —}$$

нулевой элемент,  $\forall j$ .

Из  $H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$  мы можем взять любую функцию  $w(x)$ , потому что множество элементов  $\{w_1(x), w_2(x), \dots, w_N(x), \dots\}$  плотно в  $H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$ . Таким образом, получаем:

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_{1N_t}(x,t) - y_{1N_{xx}}(x,t) + \alpha \cdot y_{1N}(\bar{x},t) - f_{1N}(x,t)] \cdot w(x) dx = 0 \in D'((0,T)),$$

для любого  $w(x) \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$ .

Равенство (1.2.33) можно записать для  $\mu$ :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} [y_{1\mu_t}(x,t) - y_{1\mu_{xx}}(x,t) + \alpha \cdot y_{1\mu}(\bar{x},t) - f_{1\mu}(x,t)] \cdot w(x) dx = 0 \in D'((0,T)),$$

для любого  $w(x) \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap (H_0^1(-\pi/2, \pi/2))$ . Отсюда при  $\mu \rightarrow \infty$  получаем, что функция  $z(x,t)$  удовлетворяет соотношению:

$$z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) + \alpha \cdot z(\bar{x},t) - f_1(x,t) = 0 \in D'((0,T); (H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2))). \quad (1.2.35)$$

Далее, уравнение (1.2.32) при  $N = \mu$  перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_0^T [-(y_{1\mu}(x,t), \phi_{jt}(x,t)) + (y_{1\mu_{xx}}(x,t), \phi_{jx}(x,t)) + \alpha \cdot (y_{1\mu}(\bar{x},t), \phi_j(x,t)) - (f_{1\mu}(x,t), \phi_j(x,t))] dt = \\ = (y_{1\mu}(x,0), \phi(0)) \cdot w_j(x), \quad \forall j = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

для любого  $\phi(t) \in \Phi((0,T))$  и при  $\mu \rightarrow \infty$  из слабой сходимости последовательностей (1.2.27), (1.2.28), (1.2.30) следует:

$$\begin{aligned} \int_0^T [-(z(x,t), \phi_{jt}(x,t)) + (z_x(x,t), \phi_{jx}(x,t)) + \alpha \cdot (z(\bar{x},t), \phi_j(x,t)) - (f_1(x,t), \phi_j(x,t))] dt = \\ = (y_{10}(x), \phi(0)) \cdot w_j(x), \quad \forall j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (1.2.36)$$

для любого  $\phi(t) \in \Phi((0,T))$ .

Далее, (1.2.36) интегрируя по  $t$  от 0 до  $T$ , находим:

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) + \alpha \cdot z(\bar{x},t) - f_1(x,t)] \cdot w_j(x) dx \right\} \cdot \phi(t) dt = \\ = - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} z(x,0) w_j(x) dx \cdot \phi(0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_{10}(x) w_j(x) dx \cdot \phi(0), \end{aligned}$$

для любых  $j = \overline{1, N}$  и  $\phi(t) \in \Phi((0,T))$ .

Поскольку согласно (1.2.35)  $z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) + \alpha \cdot z(\bar{x},t) - f_1(x,t) = 0$ , то должно быть

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z(x,0) w_j(x) dx \cdot \phi(0) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} y_{10}(x) w_j(x) dx \cdot \phi(0).$$

Отсюда следует, что  $z(x,0) = y_{10}(x)$ , следовательно  $z(x,t)$  удовлетворяет граничной задаче (1.2.1)–(1.2.3), таким образом, имеем:

$$\begin{aligned} z_t(x,t) - z_{xx}(x,t) + \alpha \cdot z(\bar{x},t) - f_1(x,t) = 0 \in D'((0,T); H^{-2}(-\pi/2, \pi/2)), \\ z(x,0) = y_{10}(x), \\ z(-\pi/2, t) = z(\pi/2, t) = 0. \end{aligned}$$

Итак, существование и единственность решения задачи (1.2.1)–(1.2.3) доказаны.

Для полного доказательства теоремы 1.2.2, нам остается показать, что решение  $z(x, t)$  граничной задачи (1.2.3)–(1.2.3) непрерывно зависит от исходных данных  $\{y_{10}(x), f_1(x, t)\}$ . Из априорных оценок (1.2.18), (1.2.19), (1.2.25), (1.2.26) непосредственно следуют оценки для решения  $z(x, t)$ :

$$\begin{aligned} \|z(x, t)\|_{L_\infty(0, T; H_0^1(-\pi/2, \pi/2)) \cap C([0, T]; H_0^1(-\pi/2, \pi/2))} &\leq C_1 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right], \\ \|z(x, t)\|_{L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2)) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} &\leq C_2 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right]. \end{aligned} \quad (1.2.37)$$

Далее, из (1.2.37) получаем:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(x, t)}{\partial x} \in L(H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2); H_0^1(-\pi/2, \pi/2)), \\ \frac{\partial^2 z(x, t)}{\partial x^2} \in L(H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2); L_2(-\pi/2, \pi/2)), \end{cases}$$

$$\|z_{xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)} \leq C \|z(x, t)\|_{H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}, \quad \forall z(x, t) \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2).$$

Норма оператора  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  из  $H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)$  в  $L_2(-\pi/2, \pi/2)$  удовлетворяет оценке

$$\sup_{\substack{z \in H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2), \\ z \neq 0}} \frac{\|z_{xx}(x, t)\|_{L_2(-\pi/2, \pi/2)}}{\|z(x, t)\|_{H^2(-\pi/2, \pi/2) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)}} \leq C,$$

так как

$$\|z_{xx}(x, t)\|_{L_2(Q)} \leq C_3 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right].$$

Далее, согласно неравенствам

$$\begin{aligned} \|z(\bar{x}, t)\|_{L_2(0, T)} &\leq C_4 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(0, T)} \right], \\ \|z_t(x, t)\|_{L_2(Q)} &\leq \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} + \|z_{xx}(x, t)\|_{L_2(Q)} + |\alpha| \cdot \|z(\bar{x}, t)\|_{L_2(0, T)} \end{aligned}$$

следует, что

$$\|z_t(x, t)\|_{L_2(Q)} \leq C_5 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right]. \quad (1.2.38)$$

Теперь согласно (1.2.37) и (1.2.38) получаем

$$\|z(x, t)\|_{Y_1(0, T)} \stackrel{\Delta}{=} \|z(x, t)\|_{L_2(0, T; H^2(-\pi/2, \pi/2)) \cap H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|z_t(x, t)\|_{L_2(Q)} \leq C_6 \left[ \|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)} \right].$$

Следовательно, норма оператора, обратного к оператору, действующему из прямого произведения пространств  $H_0^1(-\pi/2, \pi/2) \times L_2(Q)$  в пространство  $Y_1(0, T)$  удовлетворяет неравенству

$$\sup_{\|y_{10}\| + \|f_1\| \neq 0} \frac{\|z(x, t)\|_{Y_1(0, T)}}{\|y_{10}(x)\|_{H_0^1(-\pi/2, \pi/2)} + \|f_1(x, t)\|_{L_2(Q)}} \leq C_6.$$

Так как  $Az(x, t) = F = \{y_{01}(x), f_1(x, t)\}$ , то  $z(x, t) = A^{-1}F$ , где

$$A \in L(Y_1(0, T); \{H_0^1(-\pi/2, \pi/2) \times L_2(Q)\}), \quad \|A^{-1}\| \leq C_6.$$

Отсюда следует, что

$$C_6 \geq \|A^{-1}\| \geq \sup_{F \neq 0} \frac{\|z(x, t)\|}{\|F\|}.$$

Это означает, что решение  $z(x, t)$  граничной задачи (1.2.1)–(1.2.3) непрерывно зависит от исходных данных  $y_{10}(x)$ , и  $f_1(x, t)$ . Таким образом, теорема 1.2.2 доказана полностью.

Из условий (1.1.4) и (1.2.4) функция  $w(x, t) \in Y(0, T)$  непрерывно зависит от  $\{u_1(t), u_2(t)\}$ , то решение  $y_1(x, t) \in Y(0, T)$  граничной задачи (1.2.1)–(1.2.3) непрерывно зависит от  $\{u_1(t), u_2(t)\}$ . Как следствие из доказанной теоремы 1.2.2 вытекает утверждение теоремы 1.2.1, т.е. решение  $y(x, t) = y_1(x, t) + w(x, t)$  граничной задачи (1.1.1)–(1.1.3) непрерывно зависит от  $\{u_1(t), u_2(t)\}$ .

Решению задачи оптимального управления (1.1.1)–(1.1.5) будет посвящена отдельная работа.

## Список литературы

1. Нахушев А.М. // Дифференциальные уравнения. — 1983. — Т. 19. — № 1. — С. 86–94.
2. Ахмедов Ф.Ш. // Докл. АН СССР. — 1985. — Т. 283. — № 4. — С. 787–791.
3. Дженалиев М.Т. Оптимальное управление линейными нагруженными параболическими уравнениями // Дифференциальные уравнения. — 1989. — Т. 25. — № 4. — С. 641–651.
4. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М., 1967.
5. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
6. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М., 1971.
7. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. — М., 1980.
8. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. — М., 1967.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л., 1950.
10. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М., 1972.
11. Хёрмандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. I. Теория распределений и анализ Фурье. — М., 1986.
12. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. — М.: Высш. шк., 1995. — 301 с.

УДК 517.51

Г.С.Кенжебекова

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана

**ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ С ВЕСОМ СУММЫ РЯДОВ ПО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ СИСТЕМЕ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ИЗ КЛАССА  $R_0^+BVS$**

*Мақалада коэффициенттері  $R_0^+BVS$  кластарына қатысты мультипликативтік жүйе бойынша қатарлардың қосындысы салмақты интегралдануы үшін қажетті және жеткілікті шарттар табылды.*

*In this work the necessary and sufficient condition for integrability weighted sums of series with respect to multiplicative system with coefficients in  $R_0^+BVS$  are founded.*

В данной работе находится необходимое и достаточное условие для интегрируемости с весом суммы рядов по мультипликативной системе Прайса.

Пусть  $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность натуральных чисел,  $p_n \geq 2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Положим  $m_0 = 1$ ,  $m_n = p_1 \dots p_n$  при  $n \in \mathbb{N}$ . Тогда каждое  $x \in [0, 1)$  имеет разложение

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n}, \quad 0 \leq x_n < p_n, \quad x_n \text{ — целые.}$$

Такое разложение будет единственным, если для  $x = \frac{k}{m_n}$  брать разложение с конечным числом ненулевых  $x_n$ . Если  $k \in \mathbb{Z}_+$  записано в виде

$$k = \sum_{s=1}^{v(k)} k_s m_{s-1}, \quad 0 \leq k_s < p_s, \quad k_s \text{ — целые,}$$

то по определению для  $x \in [0, 1)$  полагаем

$$\chi_k(x) = \exp 2\pi i \sum_{j=1}^{v(k)} \frac{x_j k_j}{p_j}.$$

Таким образом, построенная система  $\{\chi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  называется мультипликативной на  $[0, 1)$  системой Прайса [1].

Известно, что указанная система является полной ортонормированной системой в  $L[0, 1)$  [1; 32].