

А.В. Зенков

Алтайский государственный аграрный университет, Барнаул, Россия  
(E-mail: alexey\_zenkov@yahoo.com)

## Представления и сплетения $m$ -группы

$m$ -Группа есть пара  $(G, *)$ , где  $G$  — решеточно упорядоченная группа ( $\ell$ -группа) и  $*$  есть убывающий автоморфизм 2-го порядка  $G$ . В статье получено описание  $m$ -транзитивных представлений произвольной  $m$ -группы. Найдены необходимые и достаточные условия того, что  $m$ -группа допускает точное  $m$ -транзитивное представление. Изучено строение решетки конгруэнций произвольного  $m$ -транзитивного представления, введены понятия  $m$ -2-транзитивного и  $m$ -примитивного представлений. Получено описание  $m$ -транзитивных примитивных представлений в терминах стабилизаторов. Указаны необходимые и достаточные условия  $m$ -2-транзитивности и изучены некоторые свойства таких представлений. Кроме того, введено понятие сплетения  $m$ -групп подстановок и доказано, что  $m$ -транзитивная группа подстановок вложима в сплетение подходящих  $m$ -транзитивных  $m$ -групп подстановок. Как следствие, установлено, что произвольная  $m$ -транзитивная группа из произведения двух многообразий  $m$ -групп вложима в сплетение подходящих  $m$ -транзитивных групп из этих многообразий.

*Ключевые слова:*  $m$ -группа, представление, конгруэнция, сплетение.

### Введение

Напомним основные понятия теории решеточно упорядоченных групп и групп монотонных подстановок. Решеточно упорядоченная группа ( $\ell$ -группа) — это алгебраическая система  $G$  сигнатуры. Далее изучаются только (точные)  $m$ -транзитивные представления  $l = \langle \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$ , совмещающие в себе структуры группы и решетки, связанные естественными соотношениями

$$x(u \vee v)y = xuy \vee xvy; \quad x(u \wedge v)y = xuy \wedge xvy.$$

Согласно [1]  $m$ -группой называется алгебраическая система  $G$  сигнатуры  $m = \langle \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge, * \rangle$  такая, что  $\langle G, \cdot, \cdot^{-1}, e, \vee, \wedge \rangle$  является  $\ell$ -группой, а одноместная операция  $*$  задает автоморфизм группы  $\langle G, \cdot, \cdot^{-1}, e \rangle$  порядка 2 и антиавтоморфизм решетки  $\langle G, \vee, \wedge \rangle$ , т.е.  $*$  взаимно однозначно отображает  $G$  на себя, причем выполняются соотношения

$$(xy)_* = x_*y_*, \quad (x_*)_* = x, \quad (x \vee y)_* = x_* \wedge y_*, \quad (x \wedge y)_* = x_* \vee y_*.$$

В дальнейшем  $*$  называем реверсивным автоморфизмом  $\ell$ -группы  $G$  второго порядка и  $m$ -группу  $G$  с фиксированным реверсивным автоморфизмом  $*$  записываем как пару  $(G, *)$ . Класс  $\mathcal{M}$  всех  $m$ -групп образует многообразие сигнатуры  $m$ . Множество всех многообразий  $m$ -групп  $\mathcal{M}$  является частично упорядоченным множеством относительно теоретико-множественного включения. Более того,  $\mathcal{M}$  есть решетка относительно естественно определенных операций пересечения и объединения многообразий  $m$ -групп. Как и в случае решеточно упорядоченных групп, теория представлений и сплетений групп монотонных подстановок оказывается эффективным инструментом изучения решетки  $\mathcal{M}$ .

Пусть  $\Omega$  — некоторое линейно упорядоченное множество и  $a$  — реверсивный автоморфизм 2-го порядка  $\Omega$ , т.е. для любых  $\omega, \omega' \in \Omega$  верно  $((\omega)a)a = \omega$  и  $\omega < \omega' \Leftrightarrow (\omega)a > (\omega')a$ . Через  $Aut(\Omega)$  обозначим группу (относительно суперпозиции) всех порядковых подстановок  $\Omega$ . Группа  $Aut(\Omega)$  может быть превращена в  $m$ -группу, если операция  $*$  задается при помощи равенства  $g_* = aga$  для всякого  $g \in Aut(\Omega)$ . Стандартно, представлением  $m$ -группы  $(G, *)$  порядковыми подстановками линейно упорядоченного множества  $\Omega$  является  $m$ -гомоморфизм  $\nu : G \rightarrow Aut(\Omega)$ . Этот факт записываем в виде  $((G)\nu, \Omega, a)$ . Если  $\nu$  есть изоморфизм, то представление называется *точным* и тогда пишем  $(G, \Omega, a)$ . Отметим [2], что всякая  $m$ -группа допускает точное представление порядковыми подстановками подходящего линейно упорядоченного множества.

Представление  $((G)\nu, \Omega, a)$  назовем *m-транзитивным*, если для всех  $\omega, \omega' \in \Omega$ , быть может за исключением точки  $o$ , существует такой  $x \in G_* = gr.((G)\nu, a)$ , что  $(\omega)x = \omega'$  (здесь  $o$  – точка  $\Omega$ , неподвижная относительно действия  $a$ ). Фраза «быть может за исключением точки  $o$ » означает, что  $o$  исключается из рассмотрения, если ее стабилизатор  $St_G(o) = G$ .

Данная работа является обзором результатов, полученных при изучении *m-транзитивных* представлений и связанных с этим вопросом сплетений и многообразий *m-групп*.

Как обычно,  $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$ ,  $|x| = x \vee x^{-1}$ ,  $x \gg y$  означает, что элементы  $x, y$  архимедово неэквивалентны, т.е.  $|x| > |y|^n$  для любого натурального числа  $n$ . Выражение  $x \sim y$  используем, если элементы  $x, y$  архимедово эквивалентны. Всюду в работе  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$  обозначают множества натуральных и целых чисел соответственно;  $\mathbb{R}$  – естественно линейно упорядоченное множество действительных чисел. Через  $var_m(\mathcal{K})$  обозначаем многообразие *m-групп*, порожденное классом *m-групп*  $\mathcal{K}$ .

Все необходимые сведения по теории групп и решеточно упорядоченных групп можно найти в книгах [3, 4] соответственно.

### §1 Представления и конгруэнции

Пусть  $(G, *)$  – произвольная *m-группа* и  $V$  – ее выпуклая  $\ell$ -подгруппа. Как обычно, через  $R(G : V)$  обозначим множество правых смежных классов  $\ell$ -группы  $G$  по ее выпуклой  $\ell$ -подгруппе  $V$  с порядком:  $Vx \leq Vy$  тогда и только тогда, когда  $vx \leq y$  для некоторого  $v \in V$ . Если данный порядок линейен, то  $V$  называется *спрямляющей*. Следующая теорема, доказанная в [5], дает необходимые и достаточные условия существования *m-транзитивного* представления в терминах спрямляющих подгрупп.

*Теорема 1.1.* Пусть  $(G, *)$  – *m-группа* и  $V$  – ее спрямляющая  $\ell$ -подгруппа. Тогда существует линейно упорядоченное множество, *определяемое*  $V$ , такое, что группа допускает *m-транзитивное* представление подстановками этого множества. Обратное: для всякого *m-транзитивного* представления  $((G)\nu, \Omega, a)$  найдется спрямляющая  $\ell$ -подгруппа  $V$ , определяющая  $\Omega$ .

Отметим, что доказательство этой теоремы указывает способы построения *m-транзитивных* представлений. Рассмотрим теперь вопрос о существовании точных *m-транзитивных* представлений. Выпуклая  $\ell$ -подгруппа  $V$  *m-группы*  $(G, *)$  называется *представляющей*, если  $V$  – спрямляющая и не содержит неединичных *m-идеалов*.

*Теорема 1.2.* Произвольная *m-группа*  $(G, *)$  допускает точное *m-транзитивное* представление тогда и только тогда, когда она содержит представляющую  $\ell$ -подгруппу.

Как обычно, неединичная *m-группа*  $(G, *)$  называется *подпрямо m-неразложимой*, если пересечение всех ее неединичных *m-идеалов* отлично от единицы.

*Следствие 1.3.* Подпрямо неразложимая *m-группа*  $(G, *)$  допускает точное *m-транзитивное* представление.

*Следствие 1.4.* Всякое многообразие *m-групп* порождается *m-группами*, допускающими точное *m-транзитивное* представление.

Далее изучаются только (точные) *m-транзитивные* представления. Рассмотрим  $(G, \Omega, a)$ . Пусть  $L = \{w \in \Omega \mid (w)a > w\}$ ,  $R = \{(\ell)a \mid \ell \in L\}$  и  $o$  – неподвижная, относительно  $a$ , точка  $\Omega$ . Отметим, что существуют представления, как содержащие неподвижную точку, так и не содержащие таковой. Множество  $\Omega$  представимо в виде  $\Omega = L \bigcup \{o\}^\varepsilon \bigcup R$ , где  $\varepsilon = 1$ , если неподвижная точка существует, и  $\varepsilon = 0$  в противном случае. Стандартно, отношение эквивалентности  $\Theta$ , определенное на  $\Omega$ , будем называть отношением *m-эквивалентности (m-конгруэнтности)*, если оно является выпуклым и  $w\Theta w' \Leftrightarrow (w)x\Theta(w')x$  для любого  $x \in G_*$ . Множество  $\mathcal{K}$  всех *m-эквивалентностей*, определенных на  $\Omega$ , очевидно, непусто, и более того, на  $\mathcal{K}$  можно ввести отношение частичного порядка  $\preceq$ , полагая  $\Theta_1 \preceq \Theta_2 \Leftrightarrow w\Theta_1 w' \Rightarrow w\Theta_2 w'$ .

Пусть  $\Theta \in \mathcal{K}$  и  $\Delta = \ell\Theta$  – класс эквивалентности, содержащий произвольную, но фиксированную точку  $\ell \in L$ . Множество  $\Delta$  является *m-блоком*, т.е.  $(\Delta)x \cap \Delta = \emptyset$ , либо  $(\Delta)x = \Delta$  для любого  $x \in G_*$ . Обратное: если  $\Delta$  – *m-блок*, то отношение  $\Theta$ , определенное на  $\Omega$  по правилу  $w = w'$  либо  $w, w' \in (\Delta)x$  для подходящего  $x \in G_*$ , будет отношением *m-эквивалентности*.

Если  $\Delta = \ell\Theta$ , то  $St_G(\Delta)$  – выпуклая  $\ell$ -подгруппа, содержащая  $St_G(\ell)$ . Обратное, если  $H$  – выпуклая  $\ell$ -подгруппа, содержащая  $St_G(\ell)$ , то выпуклое замыкание  $\Delta$  в  $\Omega$  орбиты  $(\ell)H$  есть *m-блок* [6].

Таким образом, существует соответствие между  $\mathcal{K}$  и множеством  $\mathcal{H}$  всех выпуклых  $\ell$ -подгрупп, содержащих  $St_G(\ell)$ . Следующий пример показывает, что оно не является взаимно однозначным.

*Пример.* Рассмотрим группу

$$S_2 = \langle a_1, a_2, b \mid [a_1, a_2] = e, a_1^b = a_2, a_2^b = a_1 \rangle.$$

Если  $g \in S_2$ , то  $g$  представим, причем единственным способом, в виде  $g = a_1^m a_2^n b^k$ ,  $k, m, n \in \mathbb{Z}$ . Относительно лексикографического порядка, т.е.  $g \geq e \Leftrightarrow k > 0$  или  $k = 0, m \geq 0, n \geq 0$ ,  $S_2$  является  $\ell$ -группой. Определим отображение  $\varphi : S_2 \rightarrow S_2$  по правилу

$$(g)\varphi = a_1^{-m} a_2^{-n} b^{-k}.$$

Тогда  $(S_2, \varphi)$  будет  $m$ -группой. Пусть  $A_1 = \langle a_1 \rangle, A_2 = \langle a_2 \rangle$ . Эти выпуклые  $\ell$ -подгруппы являются спрямляющими, т.е. множества правых смежных классов  $X = R(S_2 : A_1), Y = R(S_2 : A_2)$  линейно упорядочены относительно естественно вводимого упорядочения множества правых смежных классов. Рассмотрим  $\Delta_1 = \{A_1 a_2^n\}, \Delta_2 = \{A_2 a_1^m\}$ . Тогда  $X = \bigcup \Delta_1 b^k, Y = \bigcup \Delta_2 b^k$ .

Построим новое линейно упорядоченное множество  $\Omega$ , полагая  $\Delta_1 b^k < \Delta_2 b^k < \Delta_1 b^{k+1}$ . Очевидно, что множество  $\Omega$  сохраняет линейные порядки исходных множеств. Определим отображение  $a : \Omega \rightarrow \Omega$  по правилу  $(A_1 a_2^n b^k)a = A_2 a_1^{-n} b^{1-k}$  и  $(A_2 a_1^m b^k)a = A_1 a_2^{-m} b^{1-k}$ . Из определения следует, что  $a$  – реверсивный автоморфизм 2-го порядка  $\Omega$ . Правое регулярное представление  $(S_2, \varphi)$  порядковыми подстановками  $\Omega$  является точным и  $m$ -транзитивным, но не транзитивным. Ясно, что оно не содержит неподвижной точки. Итак, можно рассмотреть представление  $(S_2, \Omega, a)$ . Из сказанного выше следует, что  $\nabla^- = \Delta_1 \overline{\cup} \Delta_2, \Delta_2, \nabla^+ = \Delta_2 \overline{\cup} \Delta_1, b - m$ -блоки и, более того,  $St_{\Delta_2}(S_2) = St_{\nabla^+}(S_2) = St_{\nabla^-}(S_2) = A_1 \times A_2$ . Поэтому данный стабилизатор определяет три конгруэнции.

Представление  $(G, \Omega, a)$  будем называть собственным, если для любого  $g \in G$  верно  $(L)g = L$ . Несложно доказать, что такие представления дают примеры, когда  $H \in \mathcal{H}$  определяет две конгруэнции.

Итак, в случае  $m$ -групп возможны следующие ситуации: 1) соответствие между  $\mathcal{K}$  и  $\mathcal{H}$  взаимно однозначно; 2) существует  $H \in \mathcal{H}$ , определяющая две конгруэнции; 3) существует  $H \in \mathcal{H}$ , определяющая три конгруэнции. Множество  $\mathcal{H}$  является линейно упорядоченным относительно теоретико множественного включения, и все группы этого множества спрямляющие. Отметим, что ситуация 1) наблюдается в случае, когда представление транзитивно.

Для каждой  $H_\gamma \in \mathcal{H}$  через  $\Theta_\gamma, \Theta_\gamma^+, \Theta_\gamma^-$  обозначим конгруэнции, соответственно определяемые  $m$ -блоками:  $\Delta_\gamma = conv_\Omega((\ell)H_\gamma), \nabla_\gamma^+ = \Delta_\gamma \overline{\cup} (\Delta_\gamma)at, \nabla_\gamma^- = (\Delta_\gamma)at \overline{\cup} \Delta_\gamma$ . Очевидно,  $\Theta_\gamma = \Theta_\gamma^+ \cap \Theta_\gamma^-$ . Имеет место

*Теорема 1.5.* Пусть  $(G, \Omega, a)$  – произвольное  $m$ -транзитивное представление и  $\mathcal{K}$  – множество всех  $m$ -эквивалентностей, определенных на  $\Omega$ . Тогда  $\mathcal{K}$  есть линейно упорядоченное множество относительно ранее введенного порядка (ситуации 1), 2) либо существует и единственная  $H_\alpha \in \mathcal{H}$  такая, что  $\Theta_\alpha \preceq \Theta_\alpha^+, \Theta_\alpha^- \preceq \Theta_{\alpha+1}$  и  $\mathcal{K}$  линейно упорядочено при  $H_\beta \subseteq H_\alpha$  и  $H_{\alpha+1} \subseteq H_\beta$ .

Следующие  $m$  эквивалентности назовем *тривиальными*: А) эквивалентность, когда все классы эквивалентности одноэлементны; В) эквивалентность, когда все классы эквивалентности двухэлементны; С) эквивалентность, имеющая три (либо два) класса эквивалентности  $L, \{o\}, R(L, R)$ ; D) эквивалентность, имеющая единственный класс эквивалентности  $\Omega$ . Представление  $(G, \Omega, a)$   $m$ -примитивно, если оно не допускает нетривиальной  $m$ -эквивалентности. Следующая теорема дает критерий  $m$ -примитивности в терминах стабилизаторов точек.

*Теорема 1.6.* Произвольное  $m$ -транзитивное представление  $(G, \Omega, a)$ , где  $\Omega = L \overline{\cup} \{o\}^\varepsilon \overline{\cup} R$ ,  $m$ -примитивно тогда и только тогда, когда для любой точки  $w \in \Omega$ , быть может за исключением точки  $o$ , стабилизатор  $St_G(w)$  есть максимальная выпуклая  $\ell$ -подгруппа  $G$ .

Следующее утверждение выясняет строение собственных представлений.

*Предложение 1.7.* Всякое  $m$ -транзитивное представление  $(G, \Omega, a)$  собственно  $m$ -транзитивно тогда и только тогда, когда  $G$  изоморфна прямому произведению  $G_L \times G_L^*$  для подходящей транзитивной  $\ell$ -группы подстановок  $G_L$  подходящего линейно упорядоченного множества  $L$  и  $\Omega = L \overline{\cup} \{o\}^\varepsilon \overline{\cup} L^*$ .

*Следствие 1.8.* Всякая  $m$ -группа  $(G, *)$ , допускающая собственно  $m$ -транзитивное представление  $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$ , не является упорядоченной.

*Следствие 1.9.* Собственно  $m$ -транзитивное представление  $(G_L \times G_L^*, \Omega, a)$   $m$ -примитивно тогда и только тогда, когда транзитивное представление  $(G_L, L)$  примитивно.

Будем говорить, что представление  $(G, \Omega, a)$   $m$ -2-транзитивно, если для любых  $\ell_1 < \ell_2 \leq o < r_3 < < r_4 \in \Omega$ , быть может за исключением точки  $o$ , существует  $g \in G$ , что:

- 1)  $(\ell_1)g = r_3, (\ell_2)g = r_4$  либо
- 2)  $(\ell_1)ag = r_4, (\ell_2)ag = r_3$ .

Представление  $(G, \Omega, a)$ , где  $\Omega = L \overline{\cup} \{o\}^\varepsilon \overline{\cup} R$ , назовем  $m$ -полутранзитивным, если для всех  $\ell_1 < \ell_2 < \ell \in L$  существует  $g \in St_G(\ell)$ , что  $(\ell_1)g = \ell_2$ . Имеет место

*Теорема 1.10.* Представление  $(G, \Omega, a)$   $m$ -2-транзитивно тогда и только тогда, когда оно  $m$ -транзитивно и  $m$ -полутранзитивно.

*Следствие 1.11.* Если представление  $(G, \Omega, a)$   $m$ -2-транзитивно, то оно 2-транзитивно либо собственно  $m$ -примитивно.

Напомним, многообразие всех нормальнозначных  $m$ -групп  $\mathcal{N}$  задается тождеством

$$|x||y| \wedge |y|^2|x|^2 = |x||y|.$$

Это многообразие замечательно тем, что оно является наибольшим нетривиальным многообразием  $m$ -групп [7]. Следующая теорема дает описание примитивных представлений нормальнозначных групп.

*Теорема 1.12.* Пусть  $(G, \Omega, a)$  —  $m$ -примитивное представление нормальнозначной  $m$ -группы  $(G, *)$ . Тогда:

1)  $(G, \Omega, a)$  — правое регулярное представление подгруппы аддитивной группы  $\mathbb{R}$  действительных чисел. Более того, если это представление допускает эквивалентность  $B$ , то эта подгруппа циклическая, либо

2) представление является собственным и  $G \cong G_L \times G_L^*$  для подходящей подгруппы  $G_L$  аддитивной группы  $\mathbb{R}$  действительных чисел.

### §2 Сплетения и многообразия

Пусть  $(G, \Omega, a)$ ,  $(H, T, b)$  — представления  $m$ -групп  $(G, \varphi)$  и  $(H, \psi)$  соответственно и  $\Omega = L_1 \overleftarrow{\cup} \{o_1\}^{\varepsilon_1} \overleftarrow{\cup} \overleftarrow{\cup} R_1$ ,  $T = L_2 \overleftarrow{\cup} \{o_2\}^{\varepsilon_2} \overleftarrow{\cup} R_2$ . Рассмотрим стандартное (в смысле  $\ell$ -групп) сплетение  $GWrH$ . Всякий элемент  $f \in GWrH$  имеет вид  $f = (\{g_\tau\}, h)$ , где  $g_\tau \in G, \tau \in T, h \in H$ . В [1] на  $GWrH$  был определен реверсивный автоморфизм второго порядка  $\varphi Wr \psi$  по правилу  $(f)\varphi Wr \psi = (\{(g)\varphi_{(\tau)b}\}, (h)\psi)$ , превращающий  $GWrH$  в  $m$ -группу. Пусть  $\Sigma = \Omega \overleftarrow{\times} T$ . Определим на  $\Sigma$  отображение  $d$  по правилу  $(w, \tau)d = ((w)a, (\tau)b)$ . Ясно, что  $d$  — реверсивный автоморфизм второго порядка  $\Sigma$  и  $(o_1, o_2)d = (o_1, o_2)$ . Определим теперь действие элементов группы  $GWrH$  на  $\Sigma$  следующим образом:

$$(w, t)(\{g_\tau\}, h) = ((w)g_{(t)b}, (t)h).$$

Ясно, что так определенное действие является точным и порядковым, т.е.  $GWrH \subseteq \text{Aut}(\Sigma)$ . Проверим, что  $(f)\varphi Wr \psi = df$ . Действительно,  $(w, t)dfd = ((w)a, (t)b)fd = ((w)ag_t, t b h)d = ((w)ag_t a, t b h b) = (w, t)(f)\varphi Wr \psi$ . Таким образом, имеем представление  $(GWrH, \Sigma, d)$  группы  $(GWrH, \varphi Wr \psi)$ , которое будем называть *сплетением*  $m$ -групп подстановок  $(G, \Omega, a)$ ,  $(H, T, b)$ .

Пусть дано представление  $(G, \Omega, a)$  и на  $\Omega$  определена  $m$ -конгруэнция  $\Theta$ . Как и выше,  $\Delta$  —  $m$ -блок, содержащий некоторую точку  $\ell \in L$ . Тогда можно рассмотреть естественно линейно упорядоченное фактормножество  $\Omega/\Theta$ , на котором действует правым умножением  $G$ . Через  $L_\Theta$  обозначим «ленивую» подгруппу  $G$ , т.е. это все функции, оставляющие все точки  $\Omega/\Theta$  на месте. Несложно заметить, что  $L_\Theta$  есть  $m$ -идеал и поэтому можно рассмотреть фактор-группу  $\overline{G} = G/L_\Theta$ , действующую на  $\Omega/\Theta$ . Множество  $\Delta$  определяет новое линейно упорядоченное множество  $\nabla$  и действующую на нем  $m$ -транзитивно группу  $\overline{G}_{(\nabla)}$ . Отметим, что строение  $\nabla$  зависит от свойств исходного представления. Следующая теорема, доказанная в [8], есть аналог теоремы Калужнина-Краснера для подстановочных сплетений  $m$ -групп.

*Теорема 2.1.* Пусть представление  $(G, \Omega, a)$   $m$ -транзитивно и на  $\Omega$  определена  $m$ -конгруэнция  $\Theta$ . Тогда  $(G, \Omega, a)$  изоморфно вложима в сплетение  $(\overline{G}_{(\nabla)} Wr \overline{G}, \Sigma, d)$ , где группы  $\overline{G}_{(\nabla)}$  и  $\overline{G}$  действуют  $m$ -транзитивно на множествах  $\nabla$  и  $\Omega/\Theta$  соответственно.

Эта теорема позволяет использовать технику сплетений при изучении многообразий  $m$ -групп.

Напомним, что  $\ell$ -подгруппа  $H$   $\ell$ -группы  $G$  называется замкнутой, если для любого подмножества элементов  $H$ , у которого в  $G$  существует точная верхняя грань, она принадлежит  $H$ .  $m$ -Подгруппу  $H$   $m$ -группы  $G$  будем называть замкнутой, если она замкнута как  $\ell$ -подгруппа. Отметим, что

$$\left(\bigvee_{i \in I} h_i\right)_* = \bigwedge_{i \in I} (h_i)_*, \quad h_i \in H.$$

*Предложение 2.2.* Пусть  $(G, \Omega, a)$  —  $m$ -группа подстановок и  $H$  — замкнутый идеал. Тогда существует такая  $m$ -конгруэнция  $\Theta$ , что  $L_\Theta = H$ .

Пусть  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$  — произвольные многообразия  $m$ -групп. Тогда стандартно определяется их произведение  $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$  как множество всех таких  $m$ -групп  $(G, *)$ , что в них существует  $m$ -идеал  $H \in \mathcal{U}$  и  $G/H \in \mathcal{V}$ .

*Теорема 2.3.* Пусть  $(G, \Omega, a)$  —  $m$ -транзитивная группа подстановок из произведения  $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V}$  многообразий  $m$ -групп  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ . Тогда  $(G, \Omega, a)$  изоморфно вложима в сплетение подходящих  $m$ -транзитивных групп подстановок из многообразий  $m$ -групп  $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ .

Понятие мимикрирования позволяет применить предыдущую теорему в теории многообразий. Итак, рассмотрим представления  $(G, \Omega, a)$  и  $(H, \Lambda, b)$ . Фиксируем некоторое конечное, но произвольное множество  $\Phi = \{w_p(\bar{x}, \bar{x}_*) \mid p = 1, \dots, N\}$  слов сигнатуры  $m$  от переменных  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Далее рассмотрим произвольный  $\bar{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in H^n$  и произвольную пару точек  $\lambda, (\lambda)b \in \Lambda$ . Пусть  $\Lambda_\Phi = \{(\lambda)w_p(\bar{h}, \bar{h}_*)\} \cup \{((\lambda)b)w_p(\bar{h}, \bar{h}_*)\}$ . Ясно, что  $\Lambda_\Phi$  линейно упорядочено. Будем говорить, что  $(G, \Omega, a)$  мимикрирует  $(H, \Lambda, b)$ , если найдутся  $\alpha, (\alpha)a \in \Omega$  и  $\bar{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n) \in G^n$  такие, что линейно упорядоченное множество  $\Omega_\Phi = \{(\alpha)w_p(\bar{g}, \bar{g}_*)\} \cup \{((\alpha)a)w_p(\bar{g}, \bar{g}_*)\}$  «сохраняет структуру»  $\Lambda_\Phi$ , т. е.  $((\alpha)a^\varepsilon)w_p < ((\alpha)a^{\varepsilon'})w_q \Leftrightarrow ((\lambda)b^\varepsilon)w_p < ((\lambda)b^{\varepsilon'})w_q$ , где  $\varepsilon, \varepsilon' = 0$  либо  $1$ .

Представление  $(G, \Omega, a)$  мимикрирует  $m$ -группу  $(H, *)$ , если оно мимикрирует ее всякое представление. Наконец, представление  $(G, \Omega, a)$  мимикрирует многообразие  $\mathcal{V}$ , если  $(G, *) \in \mathcal{V}$  и  $(G, \Omega, a)$  мимикрирует все группы из  $\mathcal{V}$ . Очевидно, если  $(G, \Omega, a)$  мимикрирует  $\mathcal{V}$ , то  $(G, *)$  порождает  $\mathcal{V}$ . Верна

*Теорема 2.4.* Пусть многообразие  $m$ -групп  $\mathcal{U}$  порождается классом  $m$ -групп  $\mathcal{U}$  и многообразие  $m$ -групп  $\mathcal{V}$  мимикрируется классом  $m$ -групп  $\mathcal{V}$ . Тогда  $\mathcal{U} \cdot \mathcal{V} = \text{var}_m(W)$ , где  $W = \{UWrV, bWrc\}$ ;  $(U, b) \in \mathcal{U}, (V, T, c) \in \mathcal{V}$ .

Через  $\mathcal{I}$  обозначим многообразие  $m$ -групп, определяемое тождеством  $x_* = x^{-1}$ . Определим  $Inv : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  по правилу  $(z)Inv = -z$ . Тогда пара  $(\mathbb{Z}, Inv)$  есть  $m$ -группа. Рассмотрим правое регулярное представление  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Inv)$ , где  $(z)Inv = -z$ .

*Теорема 2.5.* Представление  $(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, Inv)$  мимикрирует  $\mathcal{I}$ .

*Следствие 2.6.*  $\mathcal{I} = \text{var}_m((\mathbb{Z}, Inv))$ .

Через  $\mathbb{Z}^*$  обозначим аддитивную группу целых чисел, полученную из  $\mathbb{Z}$  путем обращения порядка. Относительно координатного порядка прямое произведение  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  является  $\ell$ -группой. Определим отображение  $Exch : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$  по правилу  $(x, y)Exch = (y, x)$ , где  $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ . Тогда пара  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$  будет  $m$ -группой. Рассмотрим линейно упорядоченное множество  $\Lambda = \mathbb{Z} \cup \{o\} \cup \mathbb{Z}^*$ . Через  $(z)_1, (z)_2$  обозначим элемент  $\Lambda$ , строго меньший (большой)  $o$ , и определим  $Exch : \Lambda \rightarrow \Lambda$  по правилу  $(z)_1 Exch = (z)_2, (z)_2 Exch = (z)_1$  и  $(o) Exch = o$ . Следовательно, можно рассмотреть представление  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, Exch)$ .

*Теорема 2.7.* Представление  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, \Lambda, Exch)$  мимикрирует  $\mathcal{A}$ .

*Следствие 2.8.*  $\mathcal{A} = \text{var}_m((\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$ .

Пусть  $\mathcal{I}^1 = \mathcal{I}$  и  $\mathcal{I}^n = (\mathcal{I}^{n-1})\mathcal{I}$  при  $n \geq 2$ . Аналогично определяется  $\mathcal{A}^n$ . Через  $Wr^n(\mathbb{Z}, Inv), Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$  обозначим сплетение  $n$  копий  $m$ -групп  $(\mathbb{Z}, Inv)$  и  $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch)$  соответственно.

*Следствие 2.9.* 1)  $\mathcal{I}^n = \text{var}_m(Wr^n(\mathbb{Z}, Inv))$ , 2)  $\mathcal{A}^n = \text{var}_m(Wr^n(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*, Exch))$ .

Отметим, что многообразия  $\bigvee_n \mathcal{I}^n, \bigvee_n \mathcal{A}^n$  различны, содержатся в многообразии  $\mathcal{N}$  нормальнзначных  $m$ -групп и являются идемпотентами. Правда, неизвестно, совпадают ли  $\bigvee_n \mathcal{A}^n$  и  $\mathcal{N}$ ?

В работе [9] построен пример, показывающий, что в решетке многообразий  $m$ -групп не всегда выполнено  $\mathcal{V}(\bigvee_i \mathcal{U}_i) = \bigvee_i (\mathcal{V}\mathcal{U}_i)$  для бесконечного множества индексов. Более точно. Пусть  $\beta_n = \frac{n}{n+1}$  — действительное число ( $n \in \mathbb{N}$ ). Обозначим через  $B_{\beta_n} = (\beta_n)$  бесконечную циклическую подгруппу мультипликативной группы положительных действительных чисел, порожденную числом  $\beta_n$ . Рассмотрим множество

$$T_{\beta_n} = \{(r, a) \mid r \in B_{\beta_n}, a \in \mathbb{R}\}$$

с операцией умножения

$$(r, a)(r', a') = (rr', r'a + a').$$

Считаем, что  $(r, a) \geq e$  в  $T_{\beta_n}$ , если  $r = \beta_n^k$  и  $k > 0$  или  $k = 0$  и  $a \geq 0$  в  $\mathbb{R}$ . Непосредственная проверка показывает, что  $T_{\beta_n}$  — линейно упорядоченная группа. Пусть  $\mathcal{M}_n = \text{var}_m((T_{\beta_n} \times T_{\beta_n}^*, Exch))$  верна.

*Теорема 2.10.* Имеет место  $\mathcal{A}(\bigvee_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n) \neq \bigvee_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}\mathcal{M}_n)$ .

Отметим [10], что имеет место

$$\mathcal{U}(\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{V}_2) = \mathcal{U}\mathcal{V}_1 \vee \mathcal{U}\mathcal{V}_2.$$

## Список литературы

- 1 *Giraudet M., Rachunek J.* Varieties of half lattice-ordered groups of monotonic permutations of chains // Czech. Math. Journal. — 1999. — Vol. 49. — No. 124. — P. 743–766.
- 2 *Giraudet M., Lucas F.* Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math. — 1991. — Vol. 139. — No. 2. — P. 75–89.
- 3 *Курош А.Г.* Теория групп. — М.: Наука, 1967.
- 4 *Kopytov V.M., Medvedev N.Ya.* The theory of lattice-ordered groups. — Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publishers, 1994.
- 5 *Вараксин С.В., Зенков А.В.* О представлениях  $m$ -групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 2. — С. 298–302.
- 6 *Зенков А.В.* О конгруэнциях  $m$ -групп // Сиб. матем. журн. — 2013. — Т. 54. — № 6. — С. 1280–1288.
- 7 *Копытов В.М., Рахунке Й.* Наибольшее собственное многообразие  $m$ -групп // Алгебра и логика. — 2003. — Т. 42. — № 5. — С. 624–635.
- 8 *Зенков А.В.* Сплетения групп монотонных подстановок // Сиб. матем. журн. — 2011. — Т. 52. — № 6. — С. 1264–1270.
- 9 *Баянова Н.В., Зенков А.В.* О бесконечной дистрибутивности в решетке многообразий  $m$ -групп // Алгебра и логика. — 2015. — Т. 54. — № 1. — С. 3–15.
- 10 *Зенков А.В., Исаева О.В.* Два вопроса теории  $m$ -групп // Сиб. матем. журн. — 2014. — Т. 55. — № 6. — С. 1279–1282.

А.В. Зенков

 **$M$ -группа өрімдері мен берілуі**

$m$ -Группа дегеніміз — бұл  $(G, *)$  жұбы, мұндағы  $G$  — торды реттелген  $\ell$ -группа және  $*$  2-ретті кемімелі  $G$  автоморфизмі.  $M$ -транзитивті көріністің  $m$ -группалы еркін сипаттамасы алынған.  $m$ -группа дәл  $m$ -транзитивті көріністі анықтайтын қажетті және жеткілікті шарттар алынған. Ары қарай  $m$ -транзитивті көріністің еркін конгруэнциясы торының құрылымы зерттелген,  $m$ -қарапайым көрінісі мен  $m$ -2-транзитивті ұғымдары енгізілген. Стабилизаторлар тертінде  $m$ -транзитивті қарапайым көрінісінің сипаттамасы алынған.  $m$ -2-транзитивтіліктің қажетті және жеткілікті шарттар көрсетілген және осындай көріністердің кейбір қасиеттері зерттелген. Мақалада  $m$ -группалардың алмастырып өрілу ұғымы енгізілген және алмастырудың  $m$ -транзитивті группасы  $m$ -транзитивті  $m$ -группалардың алмастыру өріміне салымдылығы дәлелденген. Салдары ретінде  $m$ -группалардың екі көпбейнеліктерінің көбейтіндісінің  $m$ -транзитивті группасы осы көпбейнеліктерден алынған сәйкес  $m$ -транзитивті өрімге салымдылығы табылған.

A.V. Zenkov

**Views and plexus  $m$ -group**

Recall that an  $m$ -group is a pair  $(G, *)$ , where  $G$  is an  $\ell$ -group and  $*$  is a decreasing order two automorphism of  $G$ . We obtain a description of the  $m$ -transitive representations of an arbitrary  $m$ -group. Some necessary and sufficient conditions are given for an  $m$ -group to admit a faithful  $m$ -transitive representation. We study the lattice of congruences of an arbitrary  $m$ -transitive representation, introduce the notions of  $m$ -2-transitive and  $m$ -primitive representations, and describe the  $m$ -transitive primitive representations in terms of stabilizers. Also we give necessary and sufficient conditions for  $m$ -2-transitivity and study some properties of these representations. We introduce the concept of wreath product of the  $m$ -groups of permutations and prove that an  $m$ -transitive group of permutations with an  $m$ -congruence is embeddable into the wreath product of the suitable  $m$ -transitive  $m$ -groups of permutations. As a consequence, we establish that an arbitrary  $m$ -transitive group in the product of two varieties of  $m$ -groups embeds into the wreath product of the suitable  $m$ -transitive groups of these varieties.

## References

- 1 Giraudet M., Rachunek J. *Czech. Math. Journal*, 1999, 49, 124, p. 743–766.
- 2 Giraudet M., Lucas F. *Groupes a' motie' ordonne's, Fundam. Math.*, 1991, 139, 2, p. 75–89.
- 3 Kurosh A.G. *The Theory of Groups*, Moscow: Nauka, 1967.
- 4 Kopytov V.M., Medvedev N.Ya. *The theory of lattice-ordered groups*, Dordrecht; Boston; London: Kluwer Academic Publ. 1994.
- 5 Varaksin S.V., Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, 54, 2, p. 229–302.
- 6 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2013, 54, 6, p. 1280–1288.
- 7 Kopytov V.M., Rachunek J. *Algebra and Logic*, 2003, 42, 5, p. 624–635.
- 8 Zenkov A.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2011, 52, 6, p. 1264–1270.
- 9 Bayanova N.V., Zenkov A.V. *Algebra and Logic*, 2015, 54, 1, p. 3–15.
- 10 Zenkov A.V., Isaeva O.V. *Siberian Mathematical Journal*, 2014, 55, 6, p. 1279–1282.

Репозиторий КАРГУ