алып,үйде отырып оқи береді. Мұндай көріністі жиі көруге болады: саябақта, скверде немесе сауда-ойын-сауық кешенінде жастар тобы отыр, олар бір-бірімен араласпайды, олардың барлық назары смартфондарға, планшеттерге, ноутбуктарға тиеді. Егер мұндай құбылыс одан әрі байқалса, балалар көп ұзамай бір бірімен араласпай кететін де шығар. Міне, біздің планетамыздағы көптеген елдердің білім министрліктері мектеп оқушыларының тірі қарым-қатынас пен оқуға деген қызығушылығын дамытудың орнына, ең аз қарсыласу жолымен өтіп, балаларға олардың қалайтын нәрселерді беруді шешті. Кейбір мамандардың айтуынша, баланың миы жаңа ақпаратты, егер ол ойын-сауық түрінде берілсе, жақсы қабылдайды, сондықтан олар сабақта ұсынылған деректерді медиасредств көмегімен оңай қабылдайды (осыған байланысты бүгінде білім беру саласында ақпараттық-коммуникациялық технологияларды пайдалану үнемі өсіп келеді). АКТ білім алушыларды оқыту және тәрбиелеу үдерісіне белсенді әсер етеді,өйткені білім беру схемасын және оқыту әдістерін өзгертеді. Сонымен қатар, АКТ-ны білім беру жүйесіне енгізу білім беру технологияларына әсер етіп қана қоймай, сонымен қатар білім беру үдерісіне жаңа технологияларды енгізеді. Олар компьютерлер мен телекоммуникацияларды, арнайы жабдықтарды, бағдарламалық және аппараттық құралдарды, ақпаратты өңдеу жүйелерін қолданумен байланысты. Олар сондай-ақ электрондық оқулықтар мен мультимедиа жататын білім беру мен сақтаудың жаңа құралдарын құрумен байланысты, электрондық кітапханалар мен мұрағаттар, жаһандық және жергілікті білім беру желілері, ақпараттық-іздестіру және ақпараттық-анықтамалық жүйелер және т.б. қазіргі уақытта акт модельдері әзірленуде, ал олардың бір бөлігі білім беру жүйесін зерттеуде табысты қолданылады. Мұндай оқу үрдісіндегі Медальдің кері жағы балалардың мұғаліммен қарым-қатынасын тоқтатады, яғни ойлау қабілеті төмендейді. Оқу үдерісін қайда қайта құру керек. Балаға әрқашан жаңа білім алуларына қолдау көрсету керек [4].

Көбі заңгер, экономист сияқты мамандықтарды 4-5 жыл оқып алады да, 4-5 жыл бойы жұмыс іздеп кетеді. Одан да осындай сұранысқа ие, ақпараттық технология саласына барғаны дұрыс және бізде осы сала мамандарының жалақысы, ең жоғарыларының қатарына жатады. Минимум 100 000-нан басталады, бұл ең жоқ дегенде. IT саласы бізде енді дамып, көркейіп келе жатыр. Егер шындап кірісетін болсақ, осы саладағы аузылы деген елдерден озып кетуімізге болады. Әлемдегі Twitter, Facebook, Google, Microsoft сияқты көптеген ірі компанияларда жұмыс жасайтын қандастарымыздың үлесі баршылық. Оны талқылаудың да қажеті жоқ.

Қорыта айтатын болсақ, болашақтың басты элементтерінің бірі болып тұрған ақпараттық технология саласына бәріміз өз үлесімізді қосуымыз керек.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. https://kk.wikipedia.org/wiki
2. Қазақ тілі терминдерінің салалық ғылыми түсіндірме сөздігі: Информатика және компьютерлік техника/ Жалпы редакциясын басқарған – А.Қ. Құсайынов. – Алматы: «Мектеп» баспасы» ЖАҚ, 2002. – 456 бет.
3. https://ikaz.info/a-paratty-tehnologiyalar-zh-ne-olardy-t-rleri/
4. https://fb.ru/article/145313/informatsionno-kommunikatsionnaya-tehnologiya-ikt-tehnologii

Баер В.В., Омаров М.Т., Карагандинский государственный университет имени академика Е.А.Букетова, факультет математики и информационных технологий, студенты гр. М-304
(Научный руководитель — PhD, доцент Космакова М.Т.)

НАГРУЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПРЕДЕЛЬНОМ СЛУЧАЕ ПОРЯДКА ПРОИЗВОДНОЙ НАГРУЖЕННОГО СЛАГАЕМОГО

Введение

В данной работе поставлена и исследована краевая задача для уравнения теплопроводности, в котором нагруженное слагаемое представлено в виде производной Капуто по пространственной переменной в предельном случае. Задача была сведена к интегральному уравнению Вольтерра второго рода, была исследована проблема разрешимости полученного интегрального уравнения в классе непрерывных функций.

1. Постановка задачи в случае целого порядка производной

Рассмотрим задачу в области

$$Q = \{(x,t)\} : x > 0, t > 0\} \tag{1}$$

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \lambda \{D^{\beta}{}_{0,x} u(x,t)\}|_{x=x_0} = f(x,t), \\ u(x,0) = 0; u(0,t), \end{cases} \tag{2}$$

где $1 < \beta < 2$, $\{D^{\beta}_{0,x} u(x,t)$ -производная Капуто при $1 < \beta < \alpha$

Введем обозначение:

$$\mu(t) = \{D^{\beta}_{0,x} u(x,t)\}|_{x=x_0} = \frac{1}{\Gamma,(2-\beta)} \int_0^x \frac{u_{\xi\xi}(\xi,t)}{(x-\xi)^{\beta-1}} d\xi. \tag{3}$$

Если $\beta = 1$, то [1]

$$D^1_{0,x} f(x) = f'(x) \tag{4}$$

Тогда задачи в области Q (1)-(2) прежний вид с учетом (2.1.4)

(5)

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} + \lambda u(x,t)|_{x=x_0} = f(x,t), \\ u(x,0) = 0; u(0,t), \end{cases}$$

(6)

Обозначение (3) можем переставить в виде :

$$\mu(t) = u_x(x,t)|_{x=x_0}$$

Тогда уравнение (5) запишем в виде:

$$u_t - a^2 u_{xx} = -\lambda\mu(t) + f(x,t) \tag{7}$$

2. Редукция задачи к интегральному уравнению Вольтерра

Обратим дифференциальную часть в задаче (7) с условиями (6)

$$u(x,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} (-\lambda\mu(\tau) + f(\xi,\tau)) G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau$$

или

$$u(x,t) = -\lambda \int_0^t \mu(\tau) \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) d\xi d\tau + f_1(x,t), \tag{8}$$

где

$$f_1(x,t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}) - \exp\left(-\frac{(x+\xi)^2}{4at}\right) \right\}$$

- функция источника.

В (8) в первом слагаемом вычисляем внутренний интеграл

$$\int_0^{+\infty} G(x,\xi+\tau)d\xi = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\left\{\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi - \int_0^{+\infty}\exp\left(\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\xi\right\}$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \eta = \dfrac{x\pm\xi}{2a\sqrt{t-\tau}} \,|\!\Rightarrow d\eta = \pm\dfrac{d\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}; \\ \xi = 0 \Rightarrow \eta = \dfrac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}; \\ \xi \to +\infty \Rightarrow \eta \to +\infty \end{array} \right\| = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{ -\int_{\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}}^{+\infty} e^{-\eta^2}d\eta \mp \int_{\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} \right\} =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \textit{В первом интеграле} \\ -\eta = y \end{array} \right\| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{ \int_{\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}}^{+\infty} e^{-y^2}dy - \int_{\frac{x}{2a\sqrt{(t-\tau)}}}^{+\infty} e^{-\eta^2} \right\} = \frac{1}{2}\left\{ erfc\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) - erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right\}.$$

Итак,

$$\int_0^{+\infty} G(x,\xi+\tau)d\xi = \frac{1}{2}\left\{ erfc\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) - erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right\} \qquad (9)$$

Т.к. по определению $erfc\ z = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_z^{+\infty} e^{-t^2}dt.$

Поскольку $erfc\ z = 1 - erf\ z$, $где\ \ erfz = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}dt$, и $erf(-z) = -erf\ z$, то (2.2.2) можно переписать в виде:

$$\int_0^{+\infty} G(x,\xi+\tau)d\xi = \frac{1}{2}\left\{ erfc\left(-\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) - erfc\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right\} = erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right),$$ то есть

$$\int_0^{+\infty} G(x,\xi+\tau)d\xi = erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right) \qquad (10)$$

Подставив выражение (10) в функцию (8), получим

$$u(x,t) = -\lambda\int_0^t erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau + f_1(x,t), \qquad (11)$$

где $f_1(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$.

(11) - решение задачи (5)-(6). Заметим, что формула решения (11) содержит неизвестную функцию $\mu(\tau)$, определенную формулой (3) при $\beta = 1$, а именно

$$\mu(t) = u_x(x,t)\,|_{x=x_0} \qquad (12)$$

Для нахождения неизвестной функции $\mu(t)$ произведем следующие операции:

А) продифференцируем (4) по x;

Б) вместо x подставим x_0.

В) левую часть полученного выражения заменим на $\mu(t)$ в силу формулы (12).

В итоге, получим:

$$\mu(t) = -\lambda\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\int_0^t erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau\right)\right\}\Bigg|_{x=x_0} + f_2(t) \qquad (13)$$

где $f_2(t) = \left.\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0}$

Вычислим в (13) производную по x от интеграла, зависящего от параметра. По правилу Лейбница [2] известно что

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx,$$

если функция $f(x,y)$ и её частная производная $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ непрерывны на прямоугольнике

$$P = \{f(x,y) : a \le x \le b;\ c \le y \le d\}.$$

Положим, что функция $g(x,\tau) = erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)$ непрерывна при $0 \le \tau \le t$ и $a \le x \le b$ и её частная производная $g(x,\tau) = \frac{d}{dx}\left(erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\right)$ также непрерывна при $0 \le \tau \le t$ и $a \le x \le b$.

Действительно, функция

$$\frac{d}{dx}\left(erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)\right) = \mu(\tau)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2}dz\right) = \mu(\tau)\cdot\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(t-\tau)}\right) =$$

$$= \frac{\mu(\tau)}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(t-\tau)}\right)$$

непрерывна при $0 \le \tau \le t$ и $a \le x \le b$, так как $\lim\limits_{\tau\to t} = \frac{\mu(\tau)}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(t-\tau)}\right) = 0$

Последнее предельное равенство можно доказать с помощью правила Лопиталя.

Дополнив функцию $g_x(x,\tau)$ значением при $t=\tau$, получим непрерывную функцию в области $Q = \{(x,\tau) : 0 \le \tau \le t;\ 0 \le x \le t\}$.

Итак, имеем:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_0^t erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\mu(\tau)d\tau\right) = \int_0^t \frac{\mu(\tau)}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2(t-\tau)}\right)d\tau$$

Подставив $x = x_0$ в последнее равенство, перепишем (13):

$$\mu(\tau) = -\lambda\int_0^t \frac{\mu(\tau)}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{2a^2(t-\tau)}\right)d\tau + f_2(t).$$

или

$$\mu(\tau) = -\lambda\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t). \tag{14}$$

$$\text{Где } K(t,\tau) = \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot\exp\left(-\frac{{x_0}^2}{2a^2(t-\tau)}\right)d\tau + f_2(t), \tag{15}$$

$$f_2(t) = \left.\frac{\partial f_1(x,t)}{\partial x}\right|_{x=x_0} \tag{16}$$

(14)- интегральное уравнение Вольтерра второго рода для определения функции $\mu(t)$

Лемма. Краевая задача (5)-(6) сводится эквивалентным образом к интегральному уравнению Вольтера второго рода (14) с ядром (15) и правой частью (16) .

3. Разрешимость интегрального уравнения в различных классах

Ядро (8) и уравнения (14) обладает свойствами:

1) $K(t,\tau) \geq 0$ при $0 \leq \tau \leq t < +\infty$

2) Ядро $K(t,\tau) = \begin{cases} K(t,\tau) \ \textit{при} \ \ \tau \neq t, \\ 0 \qquad\quad \textit{при} \ \ \tau = t \end{cases}$ непрерывно при $0 \leq \tau \leq t < +\infty$

3) $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = 0$

Свойство 1 очевидно. Свойство 2 было показано выше. Свойство 3 будет доказано ниже Исследуем ядро (15) интегрального уравнения (14).

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T |K(t,\tau)|^2 d\tau dt = \int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{1}{a^2\pi(t-\tau)}\cdot \exp\left(-\frac{x_0{}^2}{2a^2(t-\tau)}\right)d\tau dt =$$

$$= \left\| \begin{array}{l} \xi = \dfrac{x_0}{a\sqrt{2(t-\tau)}}; \quad d\tau = \dfrac{x_0^2 d\xi}{a^2\xi^3}; \quad \tau \to t \mid\Rightarrow \xi \to +\infty \\ t-\tau = \dfrac{x_0^2}{2a^2\xi^2}; \quad \tau = 0 \mid\Rightarrow \xi = \dfrac{x_0}{a\sqrt{2t}}; \end{array} \right\| = \int\limits_0^T \int\limits_{\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} \frac{2a^2\xi^2}{a^2\pi x_0^2}\cdot\frac{x_0^2}{a^2\xi^3}\cdot C d\xi dt =$$

$$= \int\limits_0^T \frac{2}{\pi}\int\limits_{\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} \frac{1}{\xi}e^{-\xi^2}d\xi dt.$$

Из $\dfrac{x_0}{a\sqrt{2t}} \leq \xi < +\infty$ следует , что $0 < \dfrac{1}{\xi} \leq \dfrac{a\sqrt{2t}}{x_0}$ при $x_0 > 0$, то

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^T |K(t,\tau)|^2 d\tau dt \leq \int\limits_0^T\int\limits_0^T \frac{2}{\pi}\cdot\frac{a\sqrt{2t}}{x_0}e^{-\xi^2}d\xi dt = \frac{2a\sqrt{2}}{\pi x_0}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int\limits_0^T \sqrt{t}\cdot erfc\left(\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}\right)dt \leq \frac{a\sqrt{2}}{x_0\sqrt{\pi}}\int\limits_0^T \sqrt{t}dt =$$

$$= \frac{2a\sqrt{2}}{3x_0\sqrt{\pi}}\cdot T\sqrt{T} < +\infty.$$

Здесь использована ограниченность функции

$$erfcz : 0 < erfcz \leq 1 \text{ при } z \geq 0$$

Также предположим, что $\int\limits_0^T |f_2(t)|^2 dt < +\infty$, т.е ядро $K(t,\tau)$ (15) и правая часть (16) интегральном уравнении (14) принадлежность классу L_2 [3] Тогда уравнения (14) имеет единственное решение $\mu(t) \in L_2[0;T]$

4. Ограниченность интегрального оператора в классе непрерывных функций

Теорема 1. Интегральное уравнение (14) при $0 \leq t \leq T$, $0 \leq \tau \leq t$, T-const, с ядром вида (15) и в предположении, что $f_2(t) \in L_2[0;T]$, разрешимо единственным образом в классе $L_2[0;T]$ при любом λ.

Далее, рассмотрим уравнение (15) с правой частью $f_2(t) \in C[0;T]$ и ядром

$$K(t,\tau) = \begin{cases} K(t,\tau) \ \textit{при} \ \ \tau \neq t, \\ 0 \qquad\quad \textit{при} \ \ \tau = t \end{cases} \tag{17}$$

Заметим, что $\lim\limits_{t\to 0}\int\limits_0^t K(t,\tau)d\tau = 0$

Тогда справедлива следующая теорема [4].

Теорема 2. Интегральное уравнение

$$\mu(t) + \lambda\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = f_2(t)$$

с ядром (17) и правой частью $f_2(t) \in C[0;T]$ и любым λ имеет единственное решение $\mu(t) \in C[0;T]$.

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Найдем оценку нормы интегрального оператора.

$$0 < \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{1}{a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\cdot \exp\left(-\frac{{x_0}^2}{4a^2(t-\tau)}\right)d\tau =$$

$$= \left\| \begin{matrix} \xi = \dfrac{x_0}{a\sqrt{2(t-\tau)}}; & d\tau = \dfrac{x_0^2 d\xi}{a^2\xi^3}; \\ t-\tau = \dfrac{x_0^2}{4a^2\xi^2}; & \dfrac{x_0}{a\sqrt{2t}} \le \xi < +\infty; \end{matrix} \right\| = \int_{\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} \frac{2a\xi}{a\sqrt{\pi}\cdot x_0}\cdot\frac{x_0^2}{2a^2\xi^3}\cdot e^{-\xi^2}d\xi =$$

$$= \frac{x_0}{a\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty}\frac{e^{-\xi^2}}{\xi^2}d\xi \le \frac{x_0}{a^2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{4a^2t}{x_0^2}\cdot\int_{\frac{x_0}{a\sqrt{2t}}}^{+\infty} e^{-\xi^2} = \frac{4T}{x_0\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot erfc\left(\frac{x_0}{2a\sqrt{t}}\right) \le \frac{2T}{x_0}.$$

Из промежутка неравенства $0 < \int_0^t K(t,\tau)d\tau \le \frac{2T}{x_0} erfc\left(\frac{x_0}{2a\sqrt{t}}\right)$ следует свойство 3 ядра $K(t,\tau)$

Тогда $0 \le \int_0^t K(t,\tau)d\tau \le \frac{2T}{x_0}$ при $T > 0, x_0 > 0$

Поэтому

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau\right| &\le \int_0^t K(t,\tau)\left|\mu(\tau)\right|d\tau \le \int_0^t K(t,\tau)\max_{t\in[0,T]}\left|\mu(\tau)\right|d\tau \\ &= \left\|\mu(\tau)\right\|_{C[0,T]}\int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau \le \frac{2T}{x_0}\left\|\mu(\tau)\right\|_{C[0,T]}\end{aligned} \tag{18}$$

Заметим, что функция $g(t) = \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau$ - непрерывна, если $\mu(\tau) \in C[0,T]$.

Оценку оператора $K : C[0,T] \to C[0,T]$, действующего по закону

$$K\mu \equiv \int_0^t K(t,\tau)\mu(\tau)d\tau \tag{19}$$

получим из неравенства (18) взяв $\max$ с обеих сторон по $t \in [0,T]$:

$$\left\|K\mu\right\|_{C[0,T]} \le \frac{2T}{x_0}\left\|\mu(t)\right\|_{C[0,T]}$$

Доказана теорема:

Теорема 3 [5]. Интегральный оператор (19) уравнения (16), действующий в классе непрерывных функций, с ядром (17) ограничен, причем для его нормы имеет место оценка:

$$\left\|K\right\| \le \frac{2T}{x_0}\cdot$$

Литература:

1 Podlubny I. Fractional Differential Equations. San Diego; Boston: Academic Press, 1999.

2 Учайкин В. В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.

3 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

4 Kosmakova M.T. On an integral equation of the Dirichlet problem for the heat equation in the degenerating domain // Bulletin of the Karaganda University-Mathematics, 2016, No.1 (81), P. 62-67.

5 Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.