УДК 517.946

Р.Д.Ахметкалиева

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: raya_84@mail.ru)

Коэрцитивные оценки решения одного класса дифференциальных уравнений третьего порядка

В статье рассмотрено дифференциальное уравнение третьего порядка с неограниченными коэффициентами $-\mu_1(x)\left(\mu_2(x)(\mu_1(x)y')'\right)' + [q(x)+ir(x)+\lambda]y = f(x)$ в пространстве $L_p(R)$ $(1 < p < \infty)$. В частном случае, когда $p = 2$, дифференциальный оператор, соответствующий рассматриваемому уравнению, неполуограничен, поэтому при решении задачи об оценке решения и его производных встречаются дополнительные трудности. Получены теорема существования и единственности и оценки нормы решения с весом и его производных. Решение понимается в сильном смысле.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, дифференциальный оператор, неполуограниченный оператор, финитная функция, разделимость, замыкание, ограниченная обратимость, обратный оператор, неограниченная область, сопряженный оператор, расширение оператора.

Пусть $1 < p < +\infty$. Через $L_p \equiv L_p(R)$, $R = (-\infty, +\infty)$, обозначим пространство функций с конечной нормой

$$\|\varphi\|_p := \left(\int_R |\varphi(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\left(l + \lambda E\right) y := -\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)y'\right)'\right)' + [q(x) + ir(x) + \lambda]y = f(x), \tag{1}$$

где $f \in L_p$, $\lambda \geq 0$.

В настоящей работе мы изучаем вопрос о существовании и единственности решения уравнения (1), а также условия, обеспечивающие для решения y оценку:

$$\left\| \mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)y'\right)'\right)' \right\|_p^p + \left\| \left(q(x) + ir(x) + \lambda\right) y \right\|_p^p \leq c \|f(x)\|_p^p. \tag{2}$$

В случае $\mu_1(x) = \mu_2(x) = 1$ достаточные условия однозначной разрешимости уравнения (1) и оценка вида (2) для его решения были установлены при $r = 0$ в работах [1–3], а при $r \geq 1$ — в [4–6].

Определение 1. Решением уравнения (1) называется функция $y(x) \in L_p(R)$, для которой найдется последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ непрерывных и непрерывно дифференцируемых вплоть до порядка 3 финитных функций, такая что $\|y_n - y\|_p \to 0$, $\left\|\left(l + \lambda E\right) y_n - f\right\|_p \to 0$ при $n \to \infty$.

Через $C^{(k)}(R)$ $(k = 1, 2, ...)$ обозначим множество всех k раз непрерывно дифференцируемых функций $\varphi(x)$, для которых конечно величина $\sum_{j=0}^{k} \sup_{x \in R} \left|\varphi^{(j)}(x)\right|$. Пусть $W_\lambda(x) := \dfrac{|q(x) + \lambda + ir(x)|}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}$.

Теорема 1. Предположим, что функции $q(x), r(x)$ непрерывны, $\mu_1 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ $\mu_2 \in C_{loc}^{(1)}(R)$ и удовлетворяют условиям:

$$\mu_1(x) \geq 1, \ \mu_2(x) \geq 1, \ \frac{q(x)}{\mu_1^4(x)\mu_2^2(x)} \geq 1, \quad r(x) \geq 1; \tag{3}$$

$$c^{-1} \leq \frac{\mu_i(x)}{\mu_i(\eta)}, \frac{q(x)}{q(\eta)}, \frac{r(x)}{r(\eta)} \leq c, \ (i = 1, 2) \ \ x, \eta \in R, \quad |x - \eta| \leq 1; \tag{4}$$

$$\left|\mu_1^{(j)}(x)\right| \le c\mu_1(x), \quad \left|\mu_2'(x)\right| \le c\mu_2(x) \quad j=1,2,\ x\in R; \tag{5}$$

$$\sup_{|x-\eta|\le 1} \frac{\left|W_\lambda(x)-W_\lambda(\eta)\right|}{\left|W_\lambda(x)\right|^{\nu}\left|x-\eta\right|^{\mu}} < +\infty, \quad 0<\nu<\frac{\mu}{3}+1, \quad \mu\in(0,1], \quad \lambda\ge 0. \tag{6}$$

Тогда найдется число $\lambda_0 \ge 0,$ такое что уравнение (1) при всех $\lambda \ge \lambda_0$ имеет решение y.

Теорема 2. Пусть функции $q(x)$, $r(x)$ непрерывны, $\mu_1 \in C_{loc}^{(2)}(R)$ $\mu_2 \in C_{loc}^{(1)}(R)$ и удовлетворяют условиям (3), (4), (6) и

$$\left|\mu_1^{(j)}(x)\right| \le c\mu_1(x), \quad \left|\mu_2^{(i)}(x)\right| \le c\mu_2(x) \quad j=\overline{1,3}, \quad i=1,2,\ x\in R. \tag{7}$$

Тогда решение y уравнения (1) единственно и для него справедлива оценка (2).

Прежде чем доказать теоремы 1 и 2, докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть $\xi_s = \xi_s(x)$ $(s=1,2,3)$ — корни уравнения $\mu_1^2(x)\mu_2(x)\xi^3 - r(x) + i(q(x)+\lambda) = 0.$ Из условия теоремы следует, что $0<\arg\xi_0<\pi,$ $\pi<\arg\xi_j<2\pi,$ $j=1,2.$ Введем функцию

$$M_0(x,\eta,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_0}}{\xi_0^2}, & -\infty<\eta<x; \\ \dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\dfrac{e^{i(x-\eta)\xi_j}}{\xi_j^2}, & x<\eta<+\infty. \end{cases} \tag{8}$$

Непосредственным вычислением устанавливаются равенства (9)–(11):

$$\left.\frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^j}\right|_{x=\eta-0} = \left.\frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^j}\right|_{x=\eta+0}, \quad j=0,1; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta-0} - \left.\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta+0} = -\frac{1}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}; \tag{10}$$

$$-\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}\right)_\eta'\right)_\eta' + [q(x)+ir(x)+\lambda]M_0(x,\eta,\lambda) = 0. \tag{11}$$

Пусть функция $d(\eta)\in C_0^\infty(-1;1)$ такая, что

$$d(\eta) = \begin{cases} 1, & |\eta|\le \dfrac{1}{2}. \\ 0, & |\eta|\ge 1 \end{cases}$$

Обозначим

$$M_1(x,\eta,\lambda) = \left[\left(q(\eta)+ir(\eta)+\lambda\right) - \frac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\left(q(x)+ir(x)+\lambda\right)\right]M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x);$$

$$\begin{aligned} M_2(x,\eta,\lambda) = &-\Big[2\mu_1'(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)d(\eta-x) + \mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d(\eta-x) + \\ &+3\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)d_\eta'(\eta-x)\Big]\frac{\partial^2 M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2} - \\ &-\Big[\mu_1'(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2'(\eta)d(\eta-x) + \mu_1''(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)d(\eta-x) + 4\mu_1'(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)d_\eta'(\eta-x) + \\ &+2\mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d_\eta'(\eta-x) + 3\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)\mu_{\eta\eta}''(\eta)d(\eta-x)\Big]\frac{\partial M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta} - \\ &-\Big[\mu_1'(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2'(\eta)d_\eta'(\eta-x) + \mu_1''(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)d_\eta'(\eta-x) + 2\mu_1'(\eta)\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)d_{\eta\eta}''(\eta-x) + \\ &+\mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d_{\eta\eta}''(\eta-x) + \mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)\mu(\eta)d_{\eta\eta\eta}'''(\eta-x)\Big]M_0(x,\eta,\lambda); \end{aligned}$$

$$M_3(x,\eta,\lambda) = M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x).$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$\left(M_j(\lambda)f\right)(\eta) = \int_R M_j(x,\eta,\lambda)f(x)dx \ \ (j=\overline{1,3}).$$

Следующее утверждение известно [7].

Лемма 1. Пусть $1 < p < +\infty$, $k(x,\eta)$ — непрерывная функция и

$$(K\nu)(\eta) = \int_R k(x,\eta)\nu(x)dx,$$

тогда

$$\|K\|_{L_p \to L_p} \le \sup_{\eta \in R} \int_R \left[|k(x,\eta)| + |k(\eta,x)| \right] dx.$$

Лемма 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда операторы $M_j(\lambda)$, $j = \overline{1,3}$, являются непрерывными в пространстве L_p, причем имеют место оценки $(\lambda \ge 0)$

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le \frac{c_1}{b_\lambda^{\mu+3-3\nu}(\eta)}; \qquad \mu \in (0,1], \quad 0 < \nu < \frac{\mu}{3} + 1; \tag{12}$$

$$\|M_2(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le \frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}; \tag{13}$$

$$\|M_3(\lambda)\|_{L_p \to L_p} \le \frac{c_3}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta) b_\lambda^3(\eta)}, \tag{14}$$

здесь $b_\lambda(x) = \sqrt[3]{\dfrac{|r(x) - i(q(x)+\lambda)|}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}}$.

Доказательство. Согласно предположениям теоремы 1 относительно функций $q(x)$, $r(x)$, $\mu_1(\eta)$ и $\mu_2(\eta)$ найдется постоянное $\sigma > 0$ такое, что $\operatorname{Im}\xi_0 \ge \sigma$ и $\operatorname{Im}\xi_j \le -\sigma$ $(j = 1,2)$. Тогда из представления (8) вытекают оценки:

$$|M_0(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & -\infty < \eta < x; \\ \dfrac{2}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & x < \eta < +\infty; \end{cases}$$

$$\left| \frac{\partial^j M_0(x,\eta,\lambda)}{\partial \eta^j} \right| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & -\infty < \eta < x; \\ \dfrac{2}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{b_\lambda^{2-j}(x)}, & x < \eta < +\infty; \quad j = 1,2. \end{cases} \tag{15}$$

Согласно нашему выбору $M_j(x,\eta,\lambda) = 0$ при $|x-\eta| > 1$. При $|x-\eta| \le 1$ из (15), с учетом условий (3)–(6), для функций $M_j(x,\eta,\lambda)$ $(j = 0,1,2)$ получим следующие оценки:

$$|M_1(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} c\mu_1^2(x)\mu_2(x)|x-\eta|^\mu \, b_\lambda^{3\nu-2}(x) \dfrac{e^{-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}, & -\infty < \eta < x; \\ c\mu_1^2(x)\mu_2(x)|x-\eta|^\mu \, b_\lambda^{3\nu-2}(x) \dfrac{e^{\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)}}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}, & x < \eta < +\infty; \end{cases} \tag{16}$$

$$|M_2(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^k(x)}, & -\infty < \eta < x; \\ \dfrac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \displaystyle\sum_{k=0}^{2} c_k \dfrac{e^{\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^k(x)}, & x < \eta < +\infty; \end{cases} \tag{17}$$

и

$$|M_3(x,\eta,\lambda)| \le \begin{cases} \dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{-\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & -\infty < \eta > x; \\ \dfrac{2}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)} \dfrac{e^{\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)}}{b_\lambda^2(x)}, & x < \eta < +\infty. \end{cases} \tag{18}$$

Используя лемму 1 и неравенства (16)–(18), оценим нормы $\|M_j(\lambda)\|_{L_p \to L_p}$ операторов $M_j(\lambda)$ $(j=\overline{1,3})$. Отсюда имеем

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \sup_{\eta\in R}\int_R \left[|M_1(x,\eta,\lambda)| + |M_1(\eta,x,\lambda)|\right]dx \le$$

$$\le c\sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\frac{\exp[-\sigma(x-\eta)b_\lambda(x)]}{b_\lambda^2(x)} + \frac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\frac{\exp[-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)}\right)\times$$

$$\times\left|\frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)} - \frac{q(x)+\lambda+ir(x)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\right|dx.$$

Используя условия (3), (4), (6), получим

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le c\sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}\left(\frac{\exp[-\sigma(x-\eta)cb_\lambda(\eta)]}{cb_\lambda^2(\eta)} + \frac{\exp[-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)]}{b_\lambda^2(\eta)}\right)\left|\frac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}\right|^\nu |\eta-x|^\mu\,dx.$$

Отсюда, произведя замену переменного $\eta - x = \dfrac{1}{\sigma b_\lambda(\eta)}z$, получим оценку

$$\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \frac{c\left|\dfrac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}\right|^\nu}{\left(cb_\lambda(\eta)\right)^{\mu+3}} + \frac{c\left|\dfrac{q(\eta)+\lambda+ir(\eta)}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}\right|^\nu}{\left(b_\lambda(\eta)\right)^{\mu+3}} = \frac{c}{\left(\dfrac{|q(\eta)+\lambda+ir(\eta)|}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}\right)^{\frac{\mu}{3}+1-\nu}}.$$

Согласно условию (3) имеем $\dfrac{|q(\eta)+\lambda+ir(\eta)|}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)} \ge \sqrt{1+\lambda}$. Поэтому из предыдущего неравенства следует оценка (12). Неравенства (13) и (14) доказываются аналогично. Лемма доказана.

Замечание 1. Утверждение леммы 2 остается справедливым, если в условии (3) функция $r(x)$ вместо неравенства $r(x)\ge 1$ удовлетворяет неравенству $r(x)\le -1$.

Обозначим через $L+\lambda E$ $(\lambda\ge 0)$ замыкание в L_p дифференциального выражения $(l+\lambda E)y := -\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)y'\right)'\right)' + [q(x)+ir(x)+\lambda]y$, определенного на множестве $C_0^\infty(R)$ сколь угодно раз дифференцируемых и финитных функций. Из определения 1 нетрудно заметить, что функция $y\in L_p$ является решением уравнения (1), если она принадлежит $D(L+\lambda E)$ и выполнено равенство $(L+\lambda E)y = f$.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливо равенство

$$(L+\lambda E)\left[M_3(\lambda)f\right](\eta) = f(\eta) + \left[M_1(\lambda)f\right](\eta) + \left[M_2(\lambda)f\right](\eta). \qquad (19)$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left(L+\lambda E\right)\left[M_3(\lambda)f\right](\eta) = -\mu_1(\eta)\left(\mu_2(\eta)\left(\mu_1(\eta)\left(\int_{-\infty}^{\eta}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx + \int_{\eta}^{+\infty}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx\right)_\eta'\right)_\eta'\right)_\eta' +$$

$$+(q(\eta)+ir(\eta)+\lambda)\left(\int_{-\infty}^{\eta}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx + \int_{\eta}^{+\infty}M_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x)f(x)dx\right)(\eta).$$

Вычислим производные, затем, пользуясь соотношениями (9)–(11), получаем равенство (19). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. В силу оценок (12) и (13) существует такое число $\lambda_0>0$, что при $\lambda\ge\lambda_0$ выполнено неравенство $\|M_1(\lambda)\|_{L_p\to L_p} + \|M_2(\lambda)\|_{L_p\to L_p} \le \dfrac{1}{2}$. Тогда оператор $G(\lambda) = E + M_1(\lambda) + M_2(\lambda)$ имеет ограниченный в L_p обратный $G^{-1}(\lambda)$. Поэтому, полагая $h=[E+M_1(\lambda)+M_2(\lambda)]f$, из соотношения (19) получим $(L+\lambda E)[M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)h](\eta)=h$. Следовательно, для всех λ, $\lambda\ge\lambda_0$, функция $y=M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)f$ является решением уравнения (1). Теорема доказана.

Пусть функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$, $q(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, а p' — такое число, что $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Через $(L+\lambda E)^{/}$ обозначим оператор, действующий в пространстве $L_{p'}(R)$, и такой, что $\left((L+\lambda E)y,z\right)=\left(y,(L+\lambda E)^{/}z\right)$, $y\in D(L+\lambda E)$, $z\in D\left((L+\lambda E)^{/}\right)$. Очевидно, что

$$(L+\lambda E)^{/}z\equiv\left(\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)z\right)'\right)'\right)'+\left(q(x)+\lambda-ir(x)\right)z.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$(L+\lambda E)^{/}z:=\left(m(x)\left(m(x)z\right)''\right)'+\left(q(x)+\lambda-ir(x)\right)z=g(x),\qquad(20)$$

где функция $\mu_1(x)\ge1$ непрерывна вместе с производными вплоть до третьего порядка и $\mu_2(x)\ge1$ непрерывна вместе с производными вплоть до второго порядка, а $q(x)$ и $r(x)$ — непрерывные действительнозначные функции, $\lambda\ge0$, $g(x)\in L_{p'}(R)$.

Лемма 4. Пусть непрерывные функции $q(x), r(x)$ и функции $\mu_1\in C_{loc}^{(3)}(R)$, $\mu_2\in C_{loc}^{(2)}(R)$ удовлетворяют условиям (3), (4), (6) и (7). Тогда найдется число $\lambda_1\ge0$, такое что уравнение (20) для всех $\lambda\ge\lambda_1$ имеет решение.

Чтобы доказать лемму 4, сначала докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Пусть, $\zeta_l=\zeta(x)$ $(l=1,2,3)$ — корни уравнения $\mu_1^2(x)\mu_2(x)\zeta^3-r(x)-i(q(x)+\lambda)=0$. Из условия леммы 4 следует, что $0<\arg\zeta_j<\pi$ $(j=1,2)$ и $\pi<\arg\zeta_3<2\pi$. Введем функцию

$$N_0(x,\eta,\lambda)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\frac{e^{i(x-\eta)|\zeta_j}}{\zeta_j^2}, & -\infty<\eta<x;\\[2ex] \dfrac{1}{3\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\dfrac{e^{i(x-\eta)\zeta_3}}{\zeta_3^2}, & x<\eta<+\infty.\end{cases}$$

Непосредственным вычислением устанавливаются равенства (21)–(23):

$$\left.\frac{\partial^j N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^j}\right|_{x=\eta-0}=\left.\frac{\partial^j N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^j}\right|_{x=\eta+0},\quad j=0,1;\qquad(21)$$

$$\left.\frac{\partial^2 N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta-0}-\left.\frac{\partial^2 N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}\right|_{x=\eta+0}=-\frac{1}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)};\qquad(22)$$

$$\left(\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)N_0(x,\eta,\lambda)\right)_\eta^{/}\right)_\eta^{/}\right)_\eta^{/}+[q(x)-ir(x)+\lambda]N_0(x,\eta,\lambda)=0.\qquad(23)$$

Обозначим

$$N_1(x,\eta,\lambda)=\left[\left(q(\eta)+\lambda-ir(\eta)\right)-\frac{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)}{\mu_1^2(x)\mu_2(x)}\left(q(x)+\lambda-ir(x)\right)\right]N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x);$$

$$N_2(x,\eta,\lambda)=\left[4\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1'(\eta)d(\eta-x)+2\mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d(\eta-x)+\right.$$
$$\left.+3\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)d(\eta-x)\right]\frac{\partial^2N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta^2}+$$
$$+\left[5\mu_1(\eta)\mu_2'(\eta)\mu_1'(\eta)d(\eta-x)+3\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1''(\eta)d(\eta-x)+2\left(\mu_1'(\eta)\right)^2\mu_2(\eta)d(\eta-x)+\right.$$
$$+\mu_1^2(\eta)\mu_2''(\eta)d(\eta-x)+\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1'(\eta)d_\eta'(\eta-x)+4\mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d_\eta'(\eta-x)+$$

$$+3\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)d''_{\eta\eta}(\eta-x)\Big]\frac{\partial N_0(x,\eta,\lambda)}{\partial\eta}+$$

$$+\Big[3\left(\mu_1'(\eta)\right)^2\mu_2'(\eta)d(\eta-x)+\mu_1(\eta)\mu_2''(\eta)\mu_1'(\eta)d(\eta-x)+2\mu_1(\eta)\mu_2'(\eta)\mu_1''(\eta)d(\eta-x)+$$

$$+\mu_1'(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1''(\eta)d(\eta-x)+\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1'''(\eta)d(\eta-x)+5\mu_1(\eta)\mu_2'(\eta)\mu_1'(\eta)d'_\eta(\eta-x)+$$

$$+3\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1''(\eta)d'_\eta(\eta-x)+2\left(\mu_1'(\eta)\right)^2\mu_2(\eta)d'_\eta(\eta-x)+4\mu_1(\eta)\mu_2(\eta)\mu_1'(\eta)d''_{\eta\eta}(\eta-x)+$$

$$+\mu_1^2(\eta)\mu_2''(\eta)d'_\eta(\eta-x)+2\mu_1^2(\eta)\mu_2'(\eta)d''_{\eta\eta}(\eta-x)+\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)d'''_{\eta\eta\eta}(\eta-x)\Big]N_0(x,\eta,\lambda)$$

и

$$N_3(x,\eta,\lambda)=N_0(x,\eta,\lambda)d(\eta-x).$$

Введем следующие интегральные операторы:

$$\left(N_j(\lambda)g\right)(\eta)=\int_R N_j(x,\eta,\lambda)g(x)dx,\quad j=\overline{1,3}.$$

Лемма 5. Пусть выполнены все условия леммы 4. Тогда операторы $N_j(\lambda)$ являются непрерывными в пространстве $L_{p'}$, причем имеют место оценки $(\lambda\ge 0)$:

$$\|N_1(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}}\le\frac{c_1}{b_\lambda^{\beta+3-3\alpha}(\eta)},\qquad \beta\in(0,1],\quad 0<\alpha<\frac{\beta}{3}+1; \tag{24}$$

$$\|N_2(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}}\le\frac{c_2}{b_\lambda(\eta)}; \tag{25}$$

$$\|N_3(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}}\le\frac{c_3}{\mu_1^2(\eta)\mu_2(\eta)b_\lambda^3(\eta)}.$$

Доказательство. Лемма доказывается аналогично доказательству леммы 2.

Лемма 6. Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда справедливо соотношение

$$(L+\lambda E)^{/}\left[N_3(\lambda)g\right](\eta)=g(\eta)+\left[N_1(\lambda)g\right](\eta)+\left[N_2(\lambda)g\right](\eta). \tag{26}$$

Это лемма доказывается так же, как лемма 3.

Доказательство леммы 4. В силу оценок (24) и (25) существует такое число $\lambda_1>0$, что при $\lambda\ge\lambda_1$ выполняется неравенство $\|N_1(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}}+\|N_2(\lambda)\|_{L_{p'}\to L_{p'}}\le\frac{1}{2}$. Тогда оператор $\Phi(\lambda)=E+N_1(\lambda)+N_2(\lambda)$ имеет ограниченный в $L_{p'}$ обратный $\Phi^{-1}(\lambda)$. Поэтому, полагая $h=[E+N_1(\lambda)+N_2(\lambda)]g$, из соотношения (26) получим $(L+\lambda E)^{/}[N_3(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)h](\eta)=h.$ Следовательно, для всех $\lambda,\lambda\ge\lambda_1$, функция $y=N_3(\lambda)\Phi^{-1}(\lambda)g$ является решением уравнения (20). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Из леммы 4 следует, что оператор $(L+\lambda E)^{/}$, действующий в пространстве $L_{p'}(R)$, при $\lambda\ge\lambda_1$ имеет определенный на $L_{p'}(R)$ правый обратный. Поэтому $\ker\left((L+\lambda E)^{/}\right)^*=\{0\}$, где $\left((L+\lambda E)^{/}\right)^*$ — сопряженный к $(L+\lambda E)^{/}$ оператор. Отсюда, поскольку $\left((L+\lambda E)^{/}\right)^*$ является расширением оператора $L+\lambda E$, имеем $\ker(L+\lambda E)=\{0\}$, $\lambda\ge\tilde\lambda=\max(\lambda_0,\lambda_1)$. Таким образом, оператор $L+\lambda E$ в пространстве $L_{p'}(R)$ ограниченно обратим, причем

$$\left(L+\lambda E\right)^{-1}=M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda),\ \lambda\ge\tilde\lambda=\max(\lambda_0,\lambda_1). \tag{27}$$

Пусть y — решение уравнения (1), где $\lambda\ge\tilde\lambda=\max(\lambda_0,\lambda_1)$. Докажем оценку (2). Используя представление (27), лемму 1 и условия (3)–(6), имеем

$$\left\|(q+\lambda+ir)(L+\lambda E)^{-1}\right\|_{L_p\to L_p}=\left\|(q+\lambda+ir)M_3(\lambda)G^{-1}(\lambda)\right\|_{L_p\to L_p}\le$$

$$\le c\sup_{\eta\in R}\int_{\eta-1}^{\eta+1}b_\lambda^3(\eta)b_\lambda^{-2}(x)\exp[-\sigma|x-\eta|b_\lambda(x)]dx\le c_1\sup_{\eta\in R}b_\lambda(\eta)\int_{\eta-1}^{\eta+1}\exp[-\sigma|x-\eta|b_\lambda(\eta)]dx<\infty.$$

Отсюда и из (1) следует $\left\|\mu_1(x)\left(\mu_2(x)\left(\mu_1(x)y'\right)'\right)'\right\|_p \le c\left(\|f\|_p+\|y\|_p\right)$. Объединяя две последние оценки, получим (2). Теорема доказана.

Список литературы

1 *Муратбеков М.Б., Муратбеков М.М., Оспанов К.Н.* Коэрцитивная разрешимость дифференциального уравнения нечетного порядка и ее приложения // Докл. АН РФ. — Т. 435. — № 3. — 2010. — С. 310–313.

2 *Аманова Т.Т., Муратбеков М.Б.* Гладкость решений одного дифференциального оператора // Изв. АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. — 1983. — 5. — С. 5–7.

3 *Биргебаев А., Отелбаев М.* О разделимости нелинейного дифференциального оператора 3-го порядка // Изв. АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. — № 3. — 1984. — С. 11–13.

4 *Айткожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б.* О гладкости и аппроксимативных свойствах решений нелинейного дифференциального уравнения третьего порядка с комплексным потенциалом: Тез. докл. респ. науч. конф. «Теория приближения и вложения функциональных пространств». — Караганда, 1991. — С. 52.

5 *Айткожа Ж.Ж.* О гладкости и аппроксимативных свойствах решений дифференциальных уравнений нечетного порядка: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Алматы, 2003.

6 *Айткожа Ж.Ж., Муратбеков М.Б., Оспанов К.Н.* О разрешимости одного класса нелинейных сингулярных уравнений третьего порядка // Вестн. ЕНУ им. Л.Н. Гумилева. — 2005. — № 6 (46). — С. 10–15.

7 *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969. — С. 902.

Р.Д.Ахметқалиева

Үшінші ретті дифференциалдық теңдеулердің бір класы шешімінің коэрцитивті бағалаулары

Мақалада коэффициенттері шенелмеген үшінші ретті дифференциалдық $-\mu_1(x)\left(\mu_2(x)(\mu_1(x)y')'\right)' + +$ $[q(x)+ir(x)+\lambda]y=f(x)$ теңдеу $L_p(R)$ $(1<p<\infty)$ кеңістігінде қарастырылды. Дербес жағдайда, $p=2$ болғанда, қарастырылып отырған теңдеуге сәйкес дифференциалдық оператор жартылай шенелмеген, сондықтан шешім мен оның туындыларын бағалауда қосымша қиындықтар туындайды. Теңдеу шешімінің бар және жалғыз болатындығы жайлы теорема және шешімінің салмақты және оның туындыларының нормаларының бағалаулары алынды. Шешім күшті мағынада түсініледі.

R.D.Akhmetkalieva

Coercive estimates for solutions of one class of third order differential equations

In this paper we consider the following third order differential equation with unbounded coefficients $-\mu_1(x)\left(\mu_2(x)(\mu_1(x)y')'\right)' + [q(x)+ir(x)+\lambda]y=f(x)$ in space $L_p(R)$ $(1<p<\infty)$. In the particular case when $p=2$ the differential operator corresponding to the equation under consideration is not semibounded, so the problem of estimating of solution and its derivatives has additional difficulties. A theorem concerning existence and uniqueness and estimates of the norm of the solutions with a weight and its derivatives are obtained. The solution understood in the strong sense.

References

1 Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Ospanov K.N. *Coercive solvability of odd-order differential equations and its applications.* Reports of the Academy of Sciences RF, vol. 435, № 3, 2010, p. 310–313.

2 Amanova T.T., Muratbekov M.B. *Smoothness of the solution of a nonlinear differential equation*. Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Seriya of physical and mathematical, 5, 1983, p. 5–7.

3 Birgebaev A., Otelbaev M. *Separability of a third-order nonlinear differential operator*. Proceedings of the Academy of Sciences of the Kazakh SSR. Seriya of physical and mathematical, № 3, 1984, p. 11–13.

4 Aytkozha Zh.Zh., Muratbekov M.B. *On smoothness and approximation properties of solutions of nonlinear differential equations of third order with complex potential*. Abstracts of Republican Scientific Conference «Theory of approximation and embedding of functional spaces», Karaganda, 1991, p. 52.

5 Aytkozha Zh.Zh. *On smoothness and approximation properties of solutions of differential equations of odd order:* Thesis for the degree of candidate of physical and mathematical sciences. Department of Mathematics, Kazakh National University, Almaty, 2003.

6 Aytkozha Zh.Zh., Muratbekov M.B., Ospanov K.N. *On the solvability of a class of nonlinear singular third-order equations* // Eurasian National University Bulletin. № 6 (46), 2005, p. 10–15.

7 Edwards R.E. *Functional Analysis*. Theory and Applications, Moscow: Mir, 1969, p. 902.

УДК 517.51

А.О.Байарыстанов, А.М.Темирханова, С.Шаймардан

Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, Астана (E-mail: oskar_62@mail.ru)

Весовое неравенство Харди в квантовом анализе

В статье установлены необходимые и достаточные условия выполнения *q*-аналога весового (r, p)-неравенства Харди для любых положительных значений параметров r, p. Аналогом классического непрерывного математического анализа, ориентированным на информационные технологии, служит квантовое исчисление, или *h*-анализ и *q*-анализ. Квантовый анализ образно характеризуется как дифференциальное исчисление, без взятия пределов, и имеет важные приложения в аналитической теории чисел, в комбинаторике, в квантовой группе и алгебре, в квантовой физике и в других областях математики и естествознания.

Ключевые слова: весовое неравенство Харди, дискретное неравенство Харди, *q*-анализ, *h*-анализ, *q*-аналог, *h*-аналог.

1 Введение

Основу квантового анализа составляют (см. [1]) так называемые h-анализ и q-анализ. h-анализ как конечноразностное исчисление развито достаточно хорошо (см., например, [2]). В последние годы многие исследователи стали обращать большое внимание на q-анализ в связи его важным приложением в аналитической теории чисел, в комбинаторике, в квантовой группе и алгебре, в квантовой физике и в других областях математики и естествознания (см., например, [1]–[6]).

В настоящее время получены q-аналоги различных неравенств, имеющие важные значения в обычном или классическом анализе (см., например, [7]–[11]).

В классическом анализе очень важное место занимает интегральное и дискретное неравенства Харди. В последние полвека интенсивно исследовались весовое обобщеное неравенство Харди и так называемые неравенства типа Харди и их приложения в различных областях анализа. По результатам этих исследований написаны многочисленные статьи и изданы монографии (см., например, [12] и ссылки из этой монографии).

Наряду с интегральными весовыми неравенствами типа Харди интенсивно изучались дискретные весовые неравенства типа Харди, которые относятся к h-анализу, когда $h=1$.

Целью настоящей работы является установление q-аналога весового неравенства Харди вида

$$\left(\int_0^\infty \left(u(x)\int_0^x \upsilon(t) f(t)dt\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \le C\left(\int_0^\infty f^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}, \ f\ge 0, \tag{1}$$

где $0<r,q\le\infty$; u и υ — весовые, т.е. неотрицательные, измеримые на $(0,\infty)$ функции.