Пусть T - произвольная йонсоновская теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. Пусть $A \subseteq C$ есть йонсоновское множество в теории T. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $T_A^{\ C} = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально-замкнутой подмоделью в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$ и эта модель есть определимое замыкание множества A. Понятно, что рассмотренное множество предложений является йонсоновской теорией и эта теория, вообще говоря, не полна.

Пусть X йонсоновкое множество в теории T_A^C и M экзистенциально замкнутая подмодель семантической модели C, рассматриваемой йонсоновской теории T_A^C, где dcl(X) = M. Тогда пусть $Th_{\forall\exists}(M) = Fr(X)$, $Fr(X)$-есть йонсоновский фрагмент йонсоновского множества X.

Рассмотрим произвольную $Fr(A)$-теорию, тогда $E(Fr(A)) = \bigcup_{n<\omega} E_n(Fr(A))$, где $E_n(Fr(A))$ - есть решетка позитивных экзистенциальных формул с n-свободными переменными.

Определение 1. Пусть A_1, A_2 йонсоновские подмножества подмодели семантической модели C теории T_A^C. Мы будем говорить, что $Fr(A_1)$ и $Fr(A_2)$ - синтаксически подобны, если существует биекция $f : E(Fr(A_1)) \to E(Fr(A_2))$ такая, что

1) ограничение f до $E_n(Fr(A_1))$ есть изоморфизм решёток $E_n(Fr(A_1))$ и $E_n(Fr(A_2))$, $n < \omega$;
2) $f(\exists v_{n+1}\varphi) = \exists v_{n+1} f(\varphi), \varphi \in E_n(T), n < \omega$;
3) $f(v_1 = v_2) = (v_1 = v_2)$.

Один из полученных результатов в рамках выше указанных определений выглядит следующим образом:

Теорема. Пусть $Fr(A_1)$ и $Fr(A_2)$ – Σ-полные, совершенные йонсоновские теории. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) $Fr^*(A_1)$ и $Fr^*(A_2)$ - синтаксически подобны в смысле [2];
2) $Fr(A_1)$ и $Fr(A_2)$ - синтаксически подобны как в определении 1.

Список использованных источников

1. *Ешкеев А.Р.* Счетная категоричность $\Delta - PM$ -теорий // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика, №3, Специальный выпуск. – 2008.
2. *Mustafin T.G.* On similarities of complete theories // Logic Colloquium ’90: proceedings of the Annual European Summer Meeting of the Association for Symbolic Logic, held in Helsinki, Finland. – 1990.

ВОПРОС ТАЙМАНОВА А.Д. ДЛЯ ФРАГМЕНТОВ ЙОНСОНОВСКИХ МНОЖЕСТВ В ОБОГАЩЕННОЙ СИГНАТУРЕ

Ешкеев А.Р., Жумакаева К.Н., Меженина Р.О.
Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан
E-mail: modth1705@mail.ru

Пусть T - произвольная йонсоновская теория в языке первого порядка сигнатуры σ. Пусть C является семантической моделью теории T. Пусть $A \subseteq C$ есть йонсоновское множество в теории T. Пусть $\sigma_\Gamma(A) = \sigma \cup \{c_a \mid a \in A\} \cup \Gamma$, $\Gamma = \{P\} \cup \{c\}$.

Пусть $T_A^{\ C} = T \cup Th_{\forall\exists}(C, a)_{a \in A} \cup \{P(c_a) | a \in A\} \cup \{P(c)\} \cup \{"P \subseteq"\}$, где $\{"P \subseteq"\}$ есть бесконечное множество предложений, выражающих тот факт, что интерпретация символа P является экзистенциально-замкнутой подмоделью в языке сигнатуры $\sigma_\Gamma(A)$ и эта модель есть определимое замыкание множества A. Понятно, что рассмотренное множество предложений является йонсоновской теорией и эта теория, вообще говоря, не полна.

Пусть T^* является центром йонсоновской теории $T_A^{\ C}$ и $T^* = Th(C')$, где C' есть семантическая модель теории $T_A^{\ C}$. При ограничении теории $T_A^{\ C}$ до сигнатуры $\sigma_\Gamma(A) \setminus \{c\}$ теория $T_A^{\ C}$ становится полным типом. Этот тип мы и назовем центральным типом теории T относительно йонсоновского множества A.

Понятно, что модель C' это модель полученная обогащением модели C языка σ до языка $\sigma_{\Gamma}(A)$.

Хорошо известен вопрос академика А.Д.Тайманова: (*) Какими свойствами должны обладать булевы алгебры B_n, $n \in \omega$ чтобы существовала полная теория T, такая, что B_n была изоморфна $F_n(T)$, $n \in \omega$?

Выше указанный вопрос А.Д.Тайманова (*) в нашем случае можно сформулировать следующим образом:

(**) Какими свойствами должны обладать решетки E_n, $n \in \omega$, чтобы существовала теория $Fr^*(A)$, такая, что E_n была изоморфна $E_n(Fr^*(A))$, $n \in \omega$? Где $Fr^*(A)$ есть центр $Fr(A)$.

Аналогично, мы будем говорить, что вопрос (**) решается положительно для теории $Fr^*(A)$, если существует такая последовательность решеток E_n, $n \in \omega$, что E_n изоморфна $E_n(Fr^*(A))$, $n \in \omega$.

В связи с этим вопросом один из полученных результатов выглядит следующим образом:

Теорема. Пусть T_A^C совершенная, полная для экзистенциальных предложений йонсоновская теория. Тогда следующие условия эквивалентны:

1) положительное решение вопроса (**) относительно теории $Fr^*(A)$;

2) положительное решение вопроса (*) относительно #-компаньона теории $Fr\ (A)$, $\# \in \{*, 0, m, f, e\}$, где 0-компаньон есть оболочка Кайзера, * - компаньон есть центр, т-компаньон есть модельный компаньон, f-компаньон есть конечный форсинг компаньон в смысле Робинсона, e-компаньон есть элементарная теория класса всех экзистенциально-замкнутых моделей теории T.

Все неопределенные в этом тезисе определения понятий можно прочитать в [2].

Список использованных источников

1. *Мустафин Т.Г.* О булевых алгебрах теорий // Математика и физические исследования. – Караганда: КарГУ, выпуск 1, 1974. – С. 80-84.

2. *Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т.* Йонсоновские теории и их классы моделей: монография. – Караганда: Изд-во КарГУ, 2016. – 370 с.

РЕШЕТКА ЭКЗИСТЕНЦИАЛЬНЫХ ФОРМУЛ В РАМКАХ ФРАГМЕНТА ЙОНСОНВОСКИХ МНОЖЕСТВ

Ешкеев А.Р., Касыметова М.Т., Шаматаева Н.К.

Карагандинский государственный университет им. академика Е.А. Букетова, Караганда, Казахстан

E-mail: modth1705@mail.ru, naz.kz85@mail.ru

Пусть L является счетным языком первого порядка.

Определение 1. Индуктивная теория T называется *экзистенциально-простой*, если:

1. она имеет алгебраически простую модель и класс всех ее алгебраически простых моделей обозначим через AP;

2. класс (E_T) моделей теории T имеет непустое пересечение с классом AP, т.е. $T_{AP} \cap E_T \neq \emptyset$.

Хорошо известно из [1], что если йонсоновская теория T совершенна, то класс её экзистенциально замкнутых моделей E_T элементарен и совпадает с $\mathrm{Mod}\,T^*$, где T^* — её центр. В противном случае, т.е. если теория T несовершенна, мы вместо $\mathrm{Mod}\,T$ работаем с классом E_T, т.е. предполагается ,что все утверждения касаются только экзистенциально замкнутых моделей. Также мы предполагаем в несовершенном случае, что помимо экзистенциальной замкнутости все рассматриваемые модели являются алгебраически простыми.

Будем говорить, что все ∀∃-следствия произвольной теории образуют йонсоновский фрагмент этой теории, если дедуктивное замыкание этих ∀∃ - следствий есть йонсоновская теория. Полученная в этом случае йонсоновская теория будет называться йонсоновским фрагментом (в дальнейшем фрагментом). Соответственно, определяется и фрагмент йонсоновского множества. В обоих случаях мы можем проводить исследование йонсоновских фрагментов относительно связи с первоначальной теорией, что является новой постановкой задачи исследовании йонсоновских теорией.