УДК 517.911865

М.М.Букенов, С.Хабдолда

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова (E-mail: nani_serik77@mail.ru)

Асимптотическое поведение одной вязкоупругой среды

В статье рассмотрена задача линейной, изотропной вязкоупругости, построенной на основе одномерной модели Кельвина. Для исследования асимптотики решения использована постановка задачи в напряжениях, предложенная А.Н. Коноваловым. Доказана теорема о положительной определенности оператора. Получены оценки скорости сходимости решения вязкоупругой задачи к решению статической упругой задачи.

Ключевые слова: теория вязкоупругости, модели Кельвина-Фойгта, закон Гука, задачи в напряжениях, уравнения совместности деформаций, скорости сходимости решения вязкоупругой задачи.

В работе исследуется процесс установления решения динамической задачи вязкоупругости. Рассмотрим постановку задачи линейной, изотропной теории вязкоупругости. В области $S \in R^3$ требуется определить вектор перемещений $\bar{u}(x,t)$, тензоры деформаций $\varepsilon_{ik}(x,t)$ и напряжений $\sigma_{ik}(x,t)$, удовлетворяющие движениям [1–3]:

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + f_i \equiv L_i\bar{\sigma},\ \ x \in S,\ i = 1,2,3, \qquad (1)$$

соотношениям между деформациями и перемещениями

$$2\varepsilon_{ik} = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \qquad (2)$$

и уравнениям состояния среды

$$\begin{cases} s_{ik} = 2\mu\left(e_{ik} + \theta_1\dfrac{\partial e_{ik}}{\partial t}\right); \\ \sigma = 3K\left(\varepsilon + \theta_2\dfrac{\partial \varepsilon}{\partial t}\right). \end{cases} \qquad (3)$$

Здесь

$$s_{ik} = \sigma_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma,\ \sigma = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33};\ \ e_{ik} = \varepsilon_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\varepsilon,\ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \delta_{33};$$

δ_{ik} — символ Кронекера; $K = \dfrac{3\lambda + 2\mu}{3}$, $\theta_1 = \dfrac{\eta_1}{\mu}, \theta_1 = \dfrac{\eta_2}{K}$; λ, μ — коэффициенты Ламе; η_1 и η_2 — сдвиговый и объемный коэффициенты вязкости. Уравнения состояния (3) получаются применением вязкоупругой модели Кельвина-Фойгта [2] к девиаторам *sik, eik* и шаровым составляющим σ, ε тензоров напряжений и деформаций. К уравнениям (1–3) следует добавить граничные условия

$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(x,t)n_k = g_i(x),\ x \in \Gamma = \partial S \qquad (4)$$

и начальные условия

$$\bar{u}(x,0) = \bar{u}_0(x), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \bar{u}_1(x), x \in S. \qquad (5)$$

В качестве следствия из уравнений (1), (2), можно получить следующие уравнения [3]:

$$2\rho\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{\partial L_i\bar{\sigma}}{\partial x_k} + \frac{\partial L_k\bar{\sigma}}{\partial x_i}. \qquad (6)$$

Начальные условия для (6) получим следующим образом. Из (5) по формулам (2) определим в начальный момент времени деформации и их скорости. Затем подставим их в соотношения (3) и получим значение $\sigma_{ik}(x,0)$. Продифференцируем (3) по времени и, используя уравнения (6) и найденные $\sigma_{ik}(x,0)$, $\left.\frac{\partial z_{ik}}{\partial t}\right|_{t=0}$, определим значения:

$$\left.\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t}\right|_{t=0};$$

$$\sigma_{ik}(x,0)=\alpha_{ik}(x), \left.\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial t}\right|_{t=0}=\beta_{ik}(x). \tag{7}$$

В работе [1] показано, что (1)–(5) и постановка задачи в напряжениях (6), (3), (7), (4) эквивалентны. Постановку в напряжениях мы используем для получения оценок скорости, сходимости решения поставленной вязкоупругой задачи к решению следующей статической задачи теории упругости в напряжениях:

$$L_i\overline{\sigma}=0; \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_k \partial x_k}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{kk}}{\partial x_i \partial x_j}=\frac{\partial^2 \varepsilon_{ik}}{\partial x_j \partial x_k}+\frac{\partial^2 \varepsilon_{jk}}{\partial x_i \partial x_k}; \tag{9}$$

$$i, j, k = 1, 2, 3.$$

Деформации и напряжения связаны с законом Гука:

$$\sigma_{ik}=\lambda\sigma_{ik}\varepsilon+2\mu\varepsilon_{ik}. \tag{10}$$

Уравнения совместности деформаций (9) запишем следующим образом:

$$G\left(\overline{\varepsilon}\right)=0. \tag{11}$$

Граничные условия для (8–10) задаем в виде (4). Перепишем уравнения (3), (6) в форме, удобной для дальнейшего изложения. Продифференцируем два раза по времени соотношения (3), поставив в полученные уравнения соотношения (6), и запишем систему уравнений в векторной форме:

$$\rho B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2}=A\overline{\sigma}+DA\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}+\overline{F}, \tag{12}$$

$$B=\begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\mu} \end{pmatrix};$$

$$D=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \theta_2+2\theta_1 & \theta_2+\theta_1 & \theta_2+\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2+\theta_1 & \theta_2+2\theta_1 & \theta_2+\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_2+2\theta_1 & \theta_2+\theta_1 & \theta_2+2\theta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\theta_1 \end{pmatrix};$$

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0\\
0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\\
0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_2}\\
\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\\
\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\\
0 & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}
\end{pmatrix};$$

$$\overline{F}=\begin{pmatrix}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_2}\\
\frac{\partial f_3}{\partial x_3}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_2}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_1}\\
\frac{\partial f_2}{\partial x_3}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}
\end{pmatrix},\quad \overline{\sigma}=\begin{pmatrix}\sigma_{11}\\ \sigma_{22}\\ \sigma_{33}\\ \sigma_{12}\\ \sigma_{13}\\ \sigma_{23}\end{pmatrix}.$$

Матрицы B и D симметричны, перестановочны и положительно определены.

Теорема 1. Оператор ($-A$) с однородными граничными условиями (4) положительно определен.

Доказательство. Определим скалярное произведение следующим образом:

$$\left(\overline{\sigma},\overline{\varepsilon}\right)=\sum_{i,k=1}^{3}\left(\sigma_{i,k},\varepsilon_{i,k}\right);$$

$$\left(\sigma_{i,k},\varepsilon_{i,k}\right)=\int_s \sigma_{i,k}\left(M\right)\varepsilon_{i,k}\left(M\right)dm.$$

При условии $\theta_1=\theta_2=\theta$ соотношения (3) в векторной форме принимают вид

$$B\overline{\sigma}=\overline{\varepsilon}+\theta\frac{\partial\overline{\varepsilon}}{\partial t}. \tag{13}$$

В [1] доказано, что при описанном выше выборе начальных условий (7) условия совместности деформаций (9) или (11) выполняются для любого момента времени $t\geq 0$, т.е. верны соотношения

$$G\left(\overline{\varepsilon}\left(x,t\right)\right)=0;$$

$$\frac{\partial}{\partial t}G\left(\overline{\varepsilon}\left(x,t\right)\right)=0. \tag{14}$$

Из (14) и (13) получаем $G\left(\overline{\varepsilon}+\theta\frac{\partial\overline{\varepsilon}}{\partial t}\right)=G\left(B\overline{\sigma}\right)=0.$ Обозначим

$$\overline{\varepsilon}^{*}\left(x,t\right)=B\overline{\sigma}\left(x,t\right). \tag{15}$$

Тогда из условия $G\left(\overline{\varepsilon}^*\right)=0$ следует, что существует вектор $\overline{u}^*$ такой, что

$$2\varepsilon_{ik}^* = \frac{\partial u_i^*}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^*}{\partial x_i}. \tag{16}$$

Используя неравенства Корна и Пуанкаре [45], можно получить

$$\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right) = \left(B^{-1}\overline{\varepsilon}^*, \overline{\varepsilon}^*\right) \geq c\left\|\overline{u}^*\right\|^2. \tag{17}$$

Так как B — положительно-определенная матрица, то

$$\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right) = \left(B\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right) \geq c_1\left\|\overline{\sigma}\right\|^2. \tag{18}$$

Интегрируя по частям и учитывая однородные граничные условия, получаем неравенства

$$-\left(A\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right) = \sum_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2;$$

$$P_k\overline{\sigma} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i}. \tag{19}$$

Пользуясь неравенствами (17) и (18), проведем следующую цепочку неравенств:

$$-\left(A\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left(\overline{\sigma}, \varepsilon^*\right)}{\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right)} \geq c\,\frac{\sum\limits_{k=1}^{3}\left\|P_k\overline{\sigma}\right\|^2\left\|\overline{u}^*\right\|^2}{\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right)} \geq$$

$$\geq c\,\frac{\left[\sum\limits_{k=1}^{3}\left(P_k\overline{\sigma}, u_k^*\right)\right]^2}{\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right)} = c\,\frac{\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right)^2}{\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right)} = c\left(\overline{\sigma}, \overline{\varepsilon}^*\right) \geq c\cdot c_1\left\|\overline{\sigma}\right\|^2.$$

Таким образам, окончательно имеем

$$-\left(A\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right) \geq c_2\left\|\overline{\sigma}\right\|^2. \tag{20}$$

Рассмотрим разность решений вязкоупругой задачи (12), (7), (4) $\overline{\sigma}^b$ статической задачи теории упругости (8), (9), (10) $\overline{\sigma}^b$:

$$\overline{\sigma}(x,t) = \overline{\sigma}^b(x,t) - \overline{\sigma}^y(x). \tag{21}$$

Для функций $\overline{\sigma}$ получим однородное уравнение

$$\rho B\frac{\partial^2\overline{\sigma}}{\partial t^2} = A\overline{\sigma} + DA\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t} \tag{22}$$

с нулевыми граничными условиями (4) и начальными данными

$$\overline{\sigma}(x,0) = \overline{\alpha}(x) - \overline{\sigma}^y(x) = \overline{\alpha_1}(x); \tag{23}$$

$$\left.\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial t}\right|_{t=0} = \overline{\beta}(x).$$

Матрица D и оператор A неперестановочны, поэтому оператор DA не будет самосопряженным, что неудобно для получения оценок. Далее умножим левую часть уравнения (22) на матрицу B^{-1}, введем новую функцию

$$\overline{p} = (-A)^{1/2}\,\overline{\sigma} = A_1^{1/2}\overline{\sigma} \tag{24}$$

и преобразуем уравнение (22) так, чтобы получить уравнение с самосопряженными операторами:

$$\frac{\partial^2\overline{p}}{\partial t^2} + C\overline{p} + L\frac{\partial\overline{p}}{\partial t} = 0; \tag{25}$$

$$C = \frac{1}{\rho}A_1^{1/2}B^{-1}A_1^{1/2},\ L = \frac{1}{\rho}A_1^{1/2}B^{-1}DA_1^{1/2}. \tag{26}$$

Граничные и начальные условия оставим без изменения, так как окончательная оценка будет получена для функции $\bar{\sigma}$. Введем функцию $\bar{z}(x,t)$:

$$\bar{p}(x,t) = e^{-\alpha t}\bar{z}(x,t) \tag{27}$$

и покажем, что эта функция ограничена в некоторой норме, которая будет определена ниже. Подставив (27) в уравнение (25) и умножив полученное уравнение скалярно на $2\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}$, получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\|\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\right\|^2 + \left(\left(\alpha^2 E + C - \alpha L\right)\bar{z}, \bar{z}\right)\right] = 2\left(\left(2\alpha E - L\right)\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}, \frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\right). \tag{28}$$

Выберем параметр $\alpha > 0$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} \alpha^2 E + C - \alpha L \geq 0; \\ 2\alpha E - L \leq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Тогда из (28) получаем оценку

$$\left\|\bar{z}(x,t)\right\|_*^2 \leq \left\|\bar{z}(x,0)\right\|_*^2 \tag{30}$$

в полунорме

$$\left\|\bar{z}(x,t)\right\|_*^2 = \left\|\frac{\partial \bar{z}}{\partial t}\right\|^2 + \left(\left(\alpha^2 E + C - \alpha L\right)\bar{z}, \bar{z}\right). \tag{31}$$

Эта оценка показывает, что для любого момента времени $\bar{z}(x,t)$ ограничена в норме (31). Возвращаясь к функции $\bar{\sigma}$ по формулам (27) и (24), имеем:

$$\left\|\bar{\sigma}(x,t)\right\|_1 \leq e^{-\alpha t}\left\|\bar{\sigma}(x,0)\right\|_1, \tag{32}$$

где

$$\left\|\bar{\sigma}(x,t)\right\|_1^2 = \left\|\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial t} + \alpha\bar{\sigma}\right\|_{A_1}^2 + \alpha^2\left\|\bar{\sigma}\right\|_{A_1}^2 + \frac{1}{\rho}\left(B^{-1}\left(E - \alpha D\right)A_1\bar{\sigma}, A_1\bar{\sigma}\right). \tag{33}$$

Для завершения доказательства сходимости решения вязкоупругой задачи к решению статической задачи теории упругости покажем, что можно выбрать параметр $\alpha > 0$, характеризующий скорость сходимости и удовлетворяющий неравенствам (29), а также найдем оптимальное значение α, т.е. такое, при котором обеспечивается наиболее быстрая скорость сходимости $\bar{\sigma}(x,t)$ к нулю. Неравенствам (29) эквивалентны следующие:

$$\begin{cases} \alpha^2 \rho A_1^{-1} + B_1\left(E - \alpha D\right) \geq 0; \\ 2\rho\alpha A_1^{-1} - B^{-1}D \leq 0, \end{cases} \tag{34}$$

для операторов $A_1^{-1}, B^{-1}D$ и D верны неравенства

$$\begin{gathered} 0 \prec A_1^{-1} \leq \frac{1}{c_2}E; \\ B^{-1}D \geq \min\left(\eta_1, 3\eta_2\right)E; \\ D \leq \max\left(\theta_1, \theta_2\right)E. \end{gathered} \tag{35}$$

Пользуясь (35), из (34) получаем:

$$\begin{cases} \alpha \leq \dfrac{1}{\max\left(\theta_1, \theta_2\right)}; \\ \dfrac{2\alpha\rho}{c_2} - \min\left(\eta_1, 3\eta_2\right) \leq 0, \end{cases}$$

или

$$\alpha(\eta_1,\eta_2)=\min\left(\frac{c_2}{2\rho}\eta_1,\frac{3c_2}{2\rho}\eta_2,\frac{1}{\max(\theta_1,\theta_2)}\right), \tag{36}$$

$$\theta_1\le\frac{\eta_1}{\mu},\ \ \theta_2\le\frac{\eta_2}{K}.$$

Решение требуемой задачи

$$\alpha^*=\max\alpha(\eta_1,\eta_2),\ \ \eta_1\ge 0,\eta_2\ge 0,$$

дается следующими значениями параметров:

$$\eta_1\le\sqrt{\frac{2\rho\mu}{c_2}},\ \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\rho\mu}{c_2}}\le\eta_2\le\frac{3\lambda+2\mu}{3\mu}\sqrt{\frac{2\rho\mu}{c_2}}; \tag{37}$$

$$\alpha^*=\sqrt{\frac{\mu c_2}{\rho}}.$$

При этом можно выбрать η_2 так, что

$$\theta_1=\theta_2=\sqrt{\frac{2\rho}{c_2\mu}}=\theta,\ \alpha^*=\frac{1}{\theta}. \tag{38}$$

Тогда полунорма (33), в которой получена оценка сходимости, упрощается и становится нормой

$$\left\|\bar\sigma(x,t)\right\|_1^2=\left\|\frac{\partial\bar\sigma}{\partial t}+\frac{1}{\theta}\bar\sigma\right\|_{A_1}^2+\frac{1}{\theta^2}\left\|\bar\sigma\right\|_{A_1}. \tag{39}$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. Решение вязкоупругой задачи (12), (7), (4) сходится к решению статической задачи теории упругости (8), (9), (10). При этом выполняется оценка скорости сходимости к нулю разности решений (32) в норме (39). Оптимальные значения параметров вязкости и скорости сходимости даются формулами (37).

Список литературы

1 *Коновалов А.Н.* О решении вязкоупругих задач в напряжениях // Численные методы решения задач теории упругости и пластичности: Материалы Всесоюзн. конф. — Ч. 1. — Новосибирск, 1978. — С. 104–109.

2 *Коновалов А.Н.* Решение задач упругости в напряжениях. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979. — С. 540.

3 *Букенов М.М.* Малые параметры в алгоритмах решения задач теории упругости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Караганда, 1986.

М.М.Букенов, С.Хабдолда

Бір тұтқыр серпімді ортаның асимптотикалық бағыты

Мақалада Кельвиннің бір өлшемді моделінде құрылған сызықты, изотропты тұтқыр серпімді есебі қарастырылған. Шешімнің асимтотикасын зерттеу үшін А.Н. Коновалов ұсынған кернеулік есептің қойылымы қолданылған. Оператордың оң анықталуы туралы теорема дәлелденген. Тұтқыр серпімді есебінің шешімінің статикалық серпімді есебінің шешіміне жинақталу жылдамдығын бағалауы алынған.

M.M.Bukenov, S.Khabdolda

The asymptotic behavior of a viscoelastic medium

This paper considers a problem the linear isotropic viscoelasticity, built on the basis of one-dimensional model Kelvin. To study the asymptotic behavior of solutions used in the formulation of the problem voltages proposed A.N. Konovalov. We prove a theorem on the positive definiteness of the operator. Estimates of the rate of convergence of solutions of a viscoelastic problem to static elastic problem.

References

1 Konovalov A.N. *Materials of All-Union Conference*, part 1, Novosibirsk, 1978, p. 104–109.

2 Konovalov A.N. *Solution of problems of elasticity in terms of stresses*, Novosibirsk: Publ. of. NGU, 1979, 540 p.

3 Bukenov M.M. *Small parameters are in the algorithms of decision of tasks of theory of resiliency:* Dis. … cand. of phys.-math. sciences, Karaganda, 1986.

УДК 667.64:678.026

А.В.Букетов, Н.В.Браило, В.Л.Алексенко, А.А.Сапронов

Херсонская государственная морская академия, Украина (E-mail: mv-brailo@yandex.ru)

Применение метода математического планирования эксперимента для определения состава эпоксикомпозитов

Методом математического планирования эксперимента согласно показателям разрушающих напряжений и модуля упругости при изгибе, а также теплостойкости определено оптимальное содержание двухкомпонентного дисперсного наполнителя в эпоксидном композитном материале. Установлено, что объединение двух наполнителей разной дисперсности улучшает когезионные свойства материалов. Доказано, что для разработанной матрицы на основе отвердителей ПЕПА (5 масс. ч.) и Telalit 410 (5 масс. ч.) в эпоксидном олигомере CHS-Epoxy 525 (100 масс. ч.) оптимальное содержание двухкомпонентного наполнителя составляет: серый шлам — 40...60 масс. ч. и перлит — 10...30 масс. ч.

Ключевые слова: эпоксидный композит, математическое планирование эксперимента, полимер, свойства.

Постановка проблемы

На сегодня важной проблемой является создание конструкционных материалов, в том числе и полимерных, с необходимым комплексом улучшенных свойств [1, 2]. Решают данную проблему за счет выбора управляемых и неуправляемых факторов, а также оптимизации диапазона их влияния на свойства материалов. Однако проведение экспериментальных исследований требует больших материальных и временных затрат. Одним из вариантов решения данной задачи является использование метода математического планирования эксперимента. Применение математической модели дает возможность получить необходимые данные при минимальном количестве опытов [3, 4].

Анализ последних исследований и публикаций. Известно [4], что одним из методов улучшения свойств композитных материалов (КМ) на основе эпоксидной матрицы является введение в связующее различных по природе и дисперсности наполнителей. Предварительно нами было исследовано влияние наполнителей различной природы и дисперсности на когезионные свойства КМ [5, 6]. Установлено оптимальное содержание мелкодисперсных (5...10 мкм) и дисперсных (63...80 мкм) частиц наполнителей различной природы для формирования покрытий разного функционального назначения с повышенными эксплуатационными характеристиками. Одновременно сочетание наполнителей различной дисперсности обеспечивает равномерное распределение частиц по объему композиции и создание материалов с повышенными эксплуатационными характеристиками. При этом метод математического планирования эксперимента позволяет установить критическое содержание нескольких наполнителей различной природы и дисперсности в эпоксидном композите при минимальном количестве проведенных экспериментов [6].

Цель работы — используя метод математического планирования эксперимента, установить оптимальное содержание двухкомпонентного наполнителя различной физической природы и дисперсности для формирования КМ с улучшенными физико-механическими свойствами.