УДК-517.96

Б.Т.Калимбетов, И.М.Омарова, Д.А.Сапаков

Международный казахско-турецкий университет им. А.Ясави, Туркестан
(E-mail: bkalimbetov@mail.ru)

Метод регуляризации для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами в резонансном случае

В статье рассмотрена начальная задача для сингулярно возмущенной интегро-дифференциальной системы с быстро осциллирующими коэффициентами. Для асимптотического интегрирования исходной задачи предложена некоторая модификация метода регуляризации С.А.Ломова. Сущность модификации состоит во введении, наряду с дополнительными независимыми переменными, связанными с быстро осциллирующими коэффициентами, переменных, учитывающих существенно особые сингулярности, которые участвуют в решении исходной задачи. Обоснована процедура построения главного члена асимптотики задачи, который при отсутствии интегрального члена совпадает с главным членом асимптотики решения дифференциальной системы.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная задача, быстро осциллирующий коэффициент, регуляризация, итерационная задача, главный член асимптотики.

Введение

При исследовании различных вопросов динамической устойчивости, свойств сред с периодической структурой и в других прикладных задачах встречаются дифференциальные уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами. Известно, что для построения асимптотических решений дифференциальных систем уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами обычно используют метод расщепления дифференциальных уравнений [1–4] и метод регуляризации [5–7].

В настоящей работе рассматривается система интегро-дифференциальных уравнений с быстро осциллирующими коэффициентами в случае собственного резонанса, т.е. для некоторых натуральных чисел k, j таких, что $k \le n,\ j \le n,$ и некоторых целых $m_{kj} \ne 0$ при каждом $t \in [t_0, T]$ имеет место тождество $\lambda_k(t) + m_{kj}\lambda_k(t) \equiv \lambda_j(t)$. При этом для любых натуральных r таких, что $r \le n,$ и для любых целых $m \ne 0$ при каждом $t \in [t_0, T]$ справедливо $m\lambda_0(t) \ne \lambda_r(t)$.

Пусть

$$\varepsilon\frac{dz(t,\varepsilon)}{dt} = A(t)z(t,\varepsilon) + \varepsilon\varphi(t)\cos\frac{2\beta(t)}{\varepsilon}Bz(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} k(s)z(s,\varepsilon)ds + h(t),\ z(t_0,\varepsilon) = z^0,\ t \in [t_0, T],\ T > t_0, \quad (1)$$

где $z(t,\varepsilon) = \{u(t,\varepsilon), \vartheta(t,\varepsilon)\}$ — неизвестная вектор-функция; $z^0 = \{u^0, \vartheta^0\}$ — известный постоянный вектор; $k(t) = \{k_1(t), k_1(t)\},\ h(t) = \{h_1(t), h_1(t)\}$ — известные вектор-функции; $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha^2(t) & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ — заданные матрицы; $\varphi(t), \alpha(t), \beta(t) > 0$ — известные функции; $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Будет построена регуляризованная асимптотика [5] решения этой задачи при $\varepsilon \to +0$ в следующих предположениях.

1. Спектр $\sigma = \{\lambda_j(t)\}_{j=1,2},$ матрицы $A(t)$ удовлетворяет при каждом $t \in [t_0, T]$ требованиям: а) $\lambda_i(t) \ne \lambda_j(t),\ i \ne j$; б) $Re\lambda_i(t) \le 0,\ \lambda_i(t) \ne 0.$

2. Функции $A(t), k(t), \alpha(t), \beta(t), h(t)$ являются функциями класса $C^\infty[t_0, T]$.

Формализм метода регуляризации

Введем регуляризирующие переменные:

$$\tau_0 = \frac{2i}{\varepsilon}\beta'(t) \equiv \psi_0(t,\varepsilon);\quad \tau_i = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\lambda_i(s)ds \equiv \psi_i(t,\varepsilon),\ i = 1,2,$$

где $\lambda_i(t)$ — собственные значения матрицы $A(t)$, и в соответствии с общей теорией метода регуляризации [5]. Рассмотрим вместо решения $z(t,\varepsilon)$ задачи (1) расширенную функцию $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$, где $\tau=(\tau_0,\tau_1,\tau_2)$ — набор дополнительных регуляризирующих переменных. Потребуем, чтобы для расширенной функции $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ выполнялось соотношение $\tilde{z}(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=z(t,\varepsilon)$.

Для расширенной функции $\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)$ рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t}+D_\lambda\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)-A(t)\cdot\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}k(s)\tilde{z}(s,\psi(s,\varepsilon),\varepsilon)ds=\\=\frac{\varepsilon\varphi(t)}{2}(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0})B\cdot\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)+h(t);\qquad \tilde{z}(t_0,\psi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0,\end{gathered}\tag{2}$$

где $D_\lambda\tilde{z}=\sum\limits_{k=0}^{2}\lambda_k(t)\dfrac{\partial\tilde{z}(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t_k}$, $\psi(t_0,\varepsilon)=\left(\dfrac{2i\beta(t_0)}{\varepsilon},0,0\right)$.

В задаче (2) пока не произведена регуляризация интегрального члена, поэтому ее еще нельзя считать «расширенной» по отношению к исходной задаче (1). Для построения «расширенной» задачи займемся регуляризацией интегрального оператора.

Предположим, что задача (2) имеет решение в виде ряда

$$z(t,\tau,\varepsilon)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j z_j(t,\tau)\tag{3}$$

с коэффициентами $z_j(t,\tau)\equiv z_j(t,\tau_0,\tau_1,\tau_2)$, имеющими вид

$$z_j(t,\tau)=z_0^{(j)}(t)+z_1^{(j)}(t)e^{\tau_1}+z_2^{(j)}(t)e^{\tau_2},\tag{4}$$

где все $z_i^{(j)}(t)\in C^\infty[0,T]$, $i=\overline{0,2}$. Подставляя ряд (3) с коэффициентами (4) в интегральный член задачи (2), получим интегралы, имеющие вид

$$I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_0(s)ds,\quad I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_1(s)e^{\psi_1(s,\varepsilon)}ds;$$

$$I_2(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_2(s)e^{\psi_2(s,\varepsilon)}ds.$$

Регуляризация интегралов I_0-I_2 заключается в построении для них формального ряда по степеням малого параметра ε. Для осуществления такой операции применим интегрирование по частям к каждому из интегралов I_0-I_2. Интеграл $I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ уже регуляризован, т.е. $I_0(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_0(s)ds$.

Рассмотрим интеграл $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$. Произведем в нем следующие действия:

$$I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_1(s)e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}ds=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_1(s)d\left(e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\right)\left(\frac{\varepsilon}{i\alpha(s)}\right)=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{k^{(j)}(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\Bigg|_{s=t_0}^{s=t}-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k^{(j)}(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=$$

$$=\varepsilon\left[\frac{k^{(j)}(t)z_1(t)}{i\alpha(t)}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\alpha(x)dx}-\frac{k^{(j)}(t_0)z_1(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{k^{(j)}(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right)ds\right]=\varepsilon\frac{k^{(j)}(t)z_1(t)}{i\alpha(t)}e^{\psi_1(t,\varepsilon)}-$$

$$-\varepsilon\frac{k^{(j)}(t_0)z_1(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\varepsilon\int_{t_0}^{t}e^{\frac{i}{\varepsilon}\int_{s_0}^{s}\alpha(x)dx}\frac{\partial}{\partial s}\left[\frac{k^{(j)}(s)z_1(s)}{i\alpha(s)}\right]ds.$$

Итак, после однократного интегрирования по частям в $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$ выделяются внеинтегральные члены, которые при $\psi=\tau$ имеют вид слагаемых суммы (4), а интегральный член снова является интегралом типа $I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$. Многократное интегрирование по частям приводит к формальному ряду

$$I_1(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv I_1(t,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k^{(j)}(t)z_1(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}-\frac{k^{(j)}(t_0)z_1(t_0)}{i\alpha(t_0)}\right]+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\left[v_1^{(j)}(t)e^{\tau_1}+v_0^{(j)}(t)\right].$$

Производя такую же операцию и для интеграла $I_2(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)$, получим формальный ряд

$$I_2(t,\psi(t,\varepsilon),\varepsilon)\equiv I_2(t,\tau,\varepsilon)=\varepsilon\left[\frac{k^{(j)}(t)z_2(t)}{-i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k^{(j)}(t_0)z_2(t_0)}{i\alpha(t_0)}\right]+\sum_{j=2}^{\infty}\varepsilon^j\left[v_2^{(j)}(t)e^{\tau_2}+v_0^{(j)}(t)\right].$$

Теперь расширенную задачу (2) можно записать в виде

$$\varepsilon\frac{\partial\tilde z(t,\tau,\varepsilon)}{\partial t}+D_\lambda\tilde z(t,\tau,\varepsilon)-A(t)\tilde z(t,\tau,\varepsilon)+R\tilde z(t,\tau,\varepsilon)=\frac{\varepsilon\varphi(t)}{2}(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0})B\tilde z(t,\tau,\varepsilon)+h(t);$$

$$\tilde z(t_0,\psi(t_0,\varepsilon),\varepsilon)=z^0, \tag{5}$$

где оператор R сопоставляет каждому формальному ряду (3) с коэффициентами $z_i(t,\tau)\in U$ формальный ряд (4), в котором все $\psi_i(t,\varepsilon)$ заменены на τ_i ($i=1,2$).

Для дальнейшего удобно представить оператор R в виде $R\tilde y=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\sum_{j=0}^{s}R_j z_{s-j}(t,\tau)$, где оператор R_j определяется следующим образом. Возьмем произвольную функцию $z(t,\tau)\in U$ в виде суммы (4) и произведем последовательное интегрирование по частям в интеграле $\int_{t_0}^{t}k(s)z_i\left(s,\frac{\psi(s)}{\varepsilon},\varepsilon\right)ds$ с выделением внеинтегральных членов порядка $1,\varepsilon,...,\varepsilon^s$ включительно. Затем во внеинтегральных членах заменяем $\psi_i(t,\varepsilon)$ на $\tau_i, i=1,2.$ Тогда $R_j z(t,\tau)$ есть коэффициент при ε^s во внеинтегральных членах. Из этого определения, в частности, следует, что

$$R_0 z_j(t,\tau)=\int_{t_0}^{t}k^{(j)}(s)z_0^{(j)}(s)ds,\quad R_1(t,\tau)=\frac{k(t)z_1^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}-\frac{k(t)z_2^{(j)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)z_2^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\frac{k(t_0)z_1^{(j)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}.$$

Подставив теперь ряд (3) в задачу (5), произведем приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях ε (с учетом формулы регуляризации интегралов). Получим следующие итерационные задачи:

$$L_0z_0(t,\tau)\equiv D_\lambda z_0(t,\tau)-A(t)z_0(t,\tau)+\int_{t_0}^{t}k(s)z_0^{(0)}(s)ds=h(t),\ z_0(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=z^0; \tag{ε^0}$$

$$L_0z_1(t,\tau)=Hz_0(t,\tau)\equiv-\frac{\partial z_0(t,\tau)}{\partial t}+\frac{\varphi(t)}{2}\left(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right)Bz_0-\frac{k(t)z_1^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}+$$

$$+\frac{k(t)z_2^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)z_1^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\frac{k(t_0)z_2^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)},\ z_1(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=0,\ \ldots. \tag{ε^1}$$

Пространство решений

Рассмотрим множества Z_k, $k=0,1,2,\ldots,$ элементы которых имеют вид $z(t,\tau)=\sum_{m=-kq}^{kq}Z^{(m)}(t)e^{\tau+m\tau_0}$, где через $e^{\tau+m\tau_0}$ обозначен вектор-столбец размерности 3 с координатами $\{e^{\tau_1+m\tau_0},e^{\tau_2+m\tau_0},e^{m\tau_0}\}$, $Z^{(m)}(t)$ — матрица размера 2×3, элементы которой бесконечно дифференцируемы на $[t_0,T]$. Заметим, что элементы матрицы $Z^{(m)}(t)$ могут сингулярно зависеть от ε. Кроме того, матрицы $Z^{(m)}(t)$ удовлетворяют условию, для формулировки которого введем следующее понятие.

Определение 1. Набор (k, m_{kj}), состоящий из натурального числа k такого, что $k \le n+1$, и целого числа $m_{kj} \ne 0$, называется резонансным, если существует натуральное число j такое, что $j \le n$, и для любого $t \in [t_0, T]$ справедливо тождество $\lambda_k(t) + m_{kj}\lambda_0(t) \equiv \lambda_j(t)$.

Число j будем называть соответствующим резонансному набору (k, m_{kj}). Отметим, что резонансный набор (k, m_{kj}) при $k \le n$ соответствует собственному резонансу, а при $k = n+1$ — вынужденному резонансу. В силу определения 1 для нашей задачи (1) резонансные наборы существуют.

Определение 2. Назовем экспоненту $e^{\tau_k + m\tau_0}\,(k = 1, 2, m \ne 0)$ резонансной экспонентой, соответствующей экспоненте $e^{\tau_j + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)}$, если число j соответствует резонансному набору (k, m).

Из соотношения определения 1 следует, что для любого $t \in [t_0, T], \varepsilon > 0$

$$\psi_k(t, \varepsilon) + m\psi_0(t, \varepsilon) \equiv \psi_j(t, \varepsilon) + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)$$

(здесь мы полагаем, что $\psi_{n+1}(t, \varepsilon) \equiv 0$). Следовательно, если $e^{\tau_k + m\tau_0}$ — резонансная экспонента, соответствующая экспоненте $e^{\tau_j + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)}$, то сужения при $\tau \equiv \psi(t, \varepsilon)$ этих экспонент равны, т.е. для любых $t \in [t_0, T], \varepsilon > 0$

$$e^{\psi_k(t, \varepsilon) + m\psi_0(t, \varepsilon)} \equiv e^{\psi_j(t, \varepsilon) + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь элемент $z(t, \tau)$, имеющий вид

$$z(t, \tau) = \sum_{m=-kq}^{kq} Z^{(m)}(t) e^{\tau + m\tau_0}, \tag{7}$$

где $Z^{(m)}(t)$ — произвольные матрицы размера 2×3, элементы которых бесконечно дифференцируемы на $[t_0, T]$. Этот элемент, вообще говоря, не принадлежит пространству Z_k, так как может содержать резонансные экспоненты.

Определение 3. Будем говорить, что элемент $z(t, \tau)$ вида (7) вкладывается в пространство Z_k как элемент $\hat{z}(t, \tau)$, если $\hat{z}(t, \tau)$ получен из $z(t, \tau)$ заменой всех резонансных экспонент на соответствующие экспоненты $e^{\tau_j + \frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)}$. Операция $z(t, \tau) \to \hat{z}(t, \tau)$ называется операцией вложения.

Из этого определения и соотношения (7) следует тождество $z(t, \tau)\big|_{\tau \equiv \psi(t, \varepsilon)} \equiv$ $\equiv \hat{z}(t, \tau)\big|_{\tau \equiv \psi(t, \varepsilon)}, \ \forall t \in [t_0, T], \ \forall \varepsilon > 0.$

Отметим также, что при операции вложения элементу (7) будет соответствовать элемент

$$\hat{z}(t, \tau) = Z^{(0)}(t) e^{\tau} + \hat{Z}^{(0)}(t) e^{\tau} + \sum_{m=-kq,\ m \ne 0}^{kq} \hat{Z}^{(m)}(t) e^{\tau + m\tau_0},$$

где $\hat{Z}^{(m)}(t)\ (m \ne 0)$ получены из матрицы $Z^{(m)}(t)$ заменой на нулевые столбцы всех столбцов $z_k^{(m)}(t)$ этих матриц, номера которых входят в резонансные наборы (k, m); матрица $\hat{Z}^{(0)}(t)$ построена по следующему правилу: если число $j = \overline{1, n}$ не соответствует ни одному резонансному набору, то j-й столбец этой матрицы нулевой, а если j соответствует одному или нескольким резонансным наборам, то j-й столбец этой матрицы $\hat{z}_j^{(0)}(t)$ равен $\hat{z}_j^{(0)}(t) = \sum_{(k, j) \sim j} z_k^{(m)}(t) e^{\frac{i}{\varepsilon} m\beta(t_0)}$ (здесь сумма берется по всем резонансным наборам (k, j), соответствующим j).

Задачи $(\overline{\varepsilon}^k)$ строятся индуктивно: если решим первые k задач $(\overline{\varepsilon}^0), (\overline{\varepsilon}^1), \ldots, (\overline{\varepsilon}^{k-1})$ в пространствах $Z_0, Z_1, \ldots, Z_{k-1}$ соответственно, то для получения $(\overline{\varepsilon}^k)$ правую часть задачи (ε^k) вкладываем в пространство Z_k. Таким образом, вместо задач $(\overline{\varepsilon}^k)$ получим следующие задачи:

$$L_0 \overline{\overline{z}}_0(t, \tau) = h(t), \ \overline{\overline{z}}_0(t_0, \psi(t_0, \varepsilon)) = z^0; \tag{$\overline{\varepsilon}^0$}$$

$$L_0\overline{\overline{z}}_1(t,\tau)=\hat{H}\overline{\overline{z}}_0(t,\tau)=-\frac{\partial\overline{\overline{z}}_0(t,\tau)}{\partial t}+\frac{\varphi(t)}{2}\left(e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right)B\overline{\overline{z}}_0-\frac{k(t)\overline{\overline{z}}_1^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_1}+$$

$$+\frac{k(t)\overline{\overline{z}}_2^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}e^{\tau_2}+\frac{k(t_0)\overline{\overline{z}}_1^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}-\frac{k(t_0)\overline{\overline{z}}_2^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)},\quad \overline{\overline{z}}_1(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=0,\ \ldots, \qquad (\overline{\varepsilon}^1)$$

где $\hat{H}\overline{\overline{z}}_0(t,\tau)$ —образ элемента $H\overline{\overline{z}}_0(t,\tau)$ при операции вложения в пространство Z_k. Для удобства сохраняем прежнее обозначение неизвестных функций в новых задачах $(\overline{\varepsilon}^0)$, $(\overline{\varepsilon}^1)$,… Для построения главного члена асимптотики нам достаточно исследовать разрешимость задач $(\overline{\varepsilon}^0)$, $(\overline{\varepsilon}^1)$ на соответственных пространствах Z_0 и Z_1. Так как в описании пространства Z_0 не содержатся резонансные экспоненты, то пространство Z_0 в резонансном случае такое же, как и в безрезонансном [5].

Разрешимость итерационных задач

Решение задачи $(\overline{\varepsilon}^0)$ в пространстве Z_0 имеет вид

$$z_0(t,\tau)=z_{o,o}(t,\tau)+z_{ч,н}(t,\tau), \qquad (8)$$

где $z_{o.o}(t,\tau)$ — общее решение однородного уравнения, соответствующего уравнению (ε^0), а $z_{ч,н}(t,\tau)$ — частное решение уравнения (ε^0). Решение однородного уравнения (ε^0) имеет вид

$$z_{o,o}(t,\tau)=c_1(t)b_1(t)e^{\tau_1}+c_2(t)b_2(t)e^{\tau_2}, \qquad (9)$$

где $b_1(t)=\{1,i\alpha(t)\}$, $b_2(t)=\{1,-i\alpha(t)\}$ — собственные векторы матрицы $A(t)$; $c_1(t),c_2(t)$ — произвольные функции, а частное решение $z_{ч,н}(t,\tau)$ есть

$$z_{ч,н}(t,\tau)\equiv z_0^{(0)}(t)=-A^{-1}(t)\cdot h(t)+\int_{t_0}^{t}A^{-1}(t)\cdot k(s)z_0^{(0)}(s)ds.$$

Таким образом, решение (9) определено в следующем виде:

$$z_0(t,\tau)=c_1(t)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_1}+c_2(t)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_2}+z_0^{(0)}(t). \qquad (10)$$

Подчиняя (10) начальным условиям $z_0(t_0,\psi(t_0,\varepsilon))=z^0$, будем иметь

$$c_1(t_0)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t_0)\end{pmatrix}+c_2(t_0)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t_0)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\dfrac{h_2(t_0)}{\alpha^2(t_0)}\\ -h_1(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u^0\\ \vartheta^0\end{pmatrix},$$

откуда находим

$$\begin{aligned}c_1(t_0)&=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{h_1(t_0)-\vartheta^0}{\alpha_0}\right);\\ c_2(t_0)&=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{\vartheta^0-h_1(t_0)}{\alpha_0}\right).\end{aligned} \qquad (11)$$

Переходим к решению задачи $(\overline{\varepsilon}^1)$ в случае собственного резонанса, т.е. когда $\beta'(t)\equiv\frac{1}{2n-1}\alpha(t)$. В этом случае резонансными наборами являются $(1,-2n+1)$ и $(2,2n-1)$. Следовательно, если $n>1$, то в описании пространства Z_1 нет резонансных экспонент, и пространство Z_1 в этом случае такое же, как и в безрезонансном случае. При $n=1$ в описании пространства Z_1 присутствуют резонансные экспоненты $e^{\tau_1+\tau_0}$ и $e^{\tau_2+\tau_0}$, коэффициенты, которых равны нулю. Поэтому правая часть задачи $(\overline{\varepsilon}^1)$ имеет вид

$$\hat{H}z_0(t,\tau)=\left[-\dot{c}_1(t)\begin{pmatrix}1\\ i\alpha(t)\end{pmatrix}e^{\tau_1}-c_1(t)\begin{pmatrix}0\\ i\dot{\alpha}(t)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(t)}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}C_2(t)e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(t_0)}-\frac{\kappa(t)z_1^{(0)}(t)}{i\alpha(t)}\right]e^{\tau_1}+$$

$$+\left[-\dot{c}_2(t)\begin{pmatrix}1\\ -i\alpha(t)\end{pmatrix}-c_2(t)\begin{pmatrix}0\\ -i\dot{\alpha}(t)\end{pmatrix}+\frac{\varphi(t)}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}c_1(t)e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(t_0)}-\frac{\kappa(t)z_2^{(0)}(t)}{-i\alpha(t)}\right]e^{\tau_2}+ \tag{12}$$

$$+\frac{\kappa(t_0)z_1^{(0)}(t_0)}{i\alpha(t_0)}+\frac{\kappa(t_0)z_2^{(0)}(t_0)}{-i\alpha(t_0)}+\frac{\varphi(t)}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\left[e^{\tau_0}+e^{-\tau_0}\right]z_{10}^{(0)}(t)-\dot{z}_0^{(0)}(t).$$

Для разрешимости уравнения (12) необходимо и достаточно, чтобы правая часть была ортогонально базисным элементом $q_i(t,\tau_i)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2\lambda_i(t)}\right\}e^{\tau_i}$, $i=1,\,2,$ ядра сопряженного оператора $L_0^*\equiv D_{\bar{\lambda}}-A^*(t)+\int\limits_{t_0}^{t}k(x)z_0^{(0)}(s)$, откуда получаем уравнения для нахождения $c_i(t)$ $(i=1,\,2)$, а именно:

$$-\dot{c}_1(t)-\frac{\dot{\alpha}(t)}{2\alpha(t)}c_1(t)-\frac{i\varphi(t)}{4\alpha(t)}e^{\frac{2i}{\varepsilon}\beta(t_0)}c_2(t)-\frac{\kappa(t)}{i\alpha(t)}c_1(t)=0;$$

$$-\dot{c}_2(t)-\frac{\dot{\alpha}(t)}{2\alpha(t)}c_2(t)+\frac{i\varphi(t)}{4\alpha(t)}e^{-\frac{2i}{\varepsilon}\beta(t_0)}c_1(t)-\frac{\kappa(t)}{-i\alpha(t)}c_2(t)=0,$$

откуда получаем

$$\begin{pmatrix}c_1(t)\\ c_2(t)\end{pmatrix}=C\left(\overline{c}_1(t_0),\overline{c}_2(t_0)\right)\times\left\{exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{-2\dot{\alpha}(s)-\sqrt{\varphi^2(s)-16\kappa^2(s)}}{4\alpha(s)},ds\right);\right.$$

$$\left.exp\left(\int\limits_{t_0}^{t}\frac{-2\dot{\alpha}(s)+\sqrt{\varphi^2(s)-16\kappa^2(s)}}{4\alpha(s)}ds\right)\right\},$$

где $C\left(\overline{c}_1(t_0),\overline{c}_2(t_0)\right)$ — вектор-функция и постоянные заданы

$$\overline{c}_1(t_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{h_1(t_0)-\vartheta^0}{\alpha_0}\right),\ \overline{c}_2(t_0)=\frac{1}{2}\left(u^0+\frac{h_2(t_0)}{\alpha_0^2}+i\frac{\vartheta^0-h_1(t_0)}{\alpha_0}\right).$$

Таким образом, нами доказана

Теорема. Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда все итерационные задачи $(\overline{\varepsilon}^0)$, $(\overline{\varepsilon}^1)$,… однозначно разрешимы в классе Z_k (при их последовательном решении).

Список литературы

1 *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — Киев: Наук. думка, 1966.

2 *Шкиль Н.И.* Асимптотические методы в дифференциальных уравнениях. — Киев: Наук. думка, 1971.

3 *Далецкий Ю.Л., Крейн С.Г.* О дифференциальных уравнениях в гильбертовом пространстве // Укр. матем. журнал. — 1950, 2. — № 4.

4 *Далецкий Ю.Л.* Асимптотический метод для некоторых дифференциальных уравнений с осциллирующими коэффициентами // ДАН СССР. — 1962. — 143. — № 5. — С. 1026–1029.

5 *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. — М.: Наука, 1981. — 400 с.

6 *Рыжих А.Д.* Асимптотическое решение линейного дифференциального уравнения с быстро осциллирующим коэффициентом // Тр. МЭИ. — 1978. — 357. — С. 92–94.

7 *Рыжих А.Д.* Применение метода регуляризации для уравнения с быстро осциллирующими коэффициентами // Матер. всесоюз. конф. по асимп. методам. Ч. I. — Алма-Ата: Наука, 1979. — С. 64–66.

Б.Т.Қалымбетов, И.М.Омарова, Д.А.Сапақов

Жылдам осцилляцияланушы коэффициентті сингулярлы ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін резонанс жағдайдағы регуляризациялау әдісі

Жылдам осцилляцияланушы коэффициентті сингуляр ауытқымалы интегро-дифференциалдық жүйе үшін алғашқы есеп қарастырылды. Алғашқы есепті асимптотикалық интегралдау үшін С.А.Ломовтың модификацияланған регуляризациялау әдісі ұсынылды. Модификацияның маңыздылығы жылдам осцилляцияланушы коэффициенттерге байланысты және алғашқы есептің шешімінде қатысушы ерекше сингулярлықтарды ескеретін қосымша тәуелсіз айнымалыларды енгізуге негізделген. Есеп шешімнің асимптотикасының бас мүшесін құру процедурасына негізделген және интеграл мүше қатыспағанда дифференциалдық жүйе шешімінің асимптотикасының бас мүшесіне сәйкес келуі көрсетілген.

B.T.Kalimbetov, I.M.Omarova, D.A.Sapakov

Regularization method for singularly perturbed integro-differential systems with rapidly oscillating coefficients in resonance case

The initial value problem for a singularly perturbed integro-differential systems with rapidly oscillating coefficients. For asymptotic integration of the original problem, a modification of the method proposed regularization S.A.Lomov. The essence of the modification is to introduce along with additional independent variables associated with rapidly oscillating coefficients and variables, taking into account the essential singular singularities that are involved in solving the original problem. Justified procedure for constructing the leading term of the problem, which in the absence of an integral member coincides with the general member of asymptotic solution of the differential system.

References

1 Fechshenko S.F., Shkil' N.I., Nikolenko L.D. *Asymptotic methods in the theory of linear differential equations*, Kiev: Naukova Dumka, 1966.

2 Shkil' N.I. *Asymptotic methods in differential equations*, Kiev: Naukova Dumka, 1971.

3 Daletskiiy Yu.L., Kreiyn S.G. *Ukrain. math. Journal*, 1950, 2, 4.

4 Daletskiiy Yu.L. *Asymptotic method for some differential equations with oscillating coefficients* // DAN SSSR, 1962, 143, 5, p. 1026–1029.

5 Lomov S.A. *Introduction to general theory of singular perturbations*, Moscow: Nauka, 1981, 400 p.

6 Ryzhikh A.D. *Asymptotic solution of linear differential equations with rapidly oscillating coefficients* // Proc. MEI, 1978, 357, p. 92–94.

7 Ryzhikh A.D. *All-Union conference on asymptotic methods*, part I., Almaty: Nauka, 1979, p. 64–66.