ӨНДІРІСТІК ЖҮЙЕЛЕРДІ ЭКОНОМИКАЛЫҚ-МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ БОЛЖАУ

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ СИСТЕМ

УДК 338.436:33:519.86

Т.Б.Казбеков

Карагандинский государственный университет им. Е.А. Букетова

Экономико-математическое моделирование показателей работы сельскохозяйственных предприятий с помощью производственной функции

Обобщены различные аспекты экономико-математического моделирования показателей работы сельскохозяйственных предприятий. Рассмотрены связи между экономическими явлениями и приемы их изучения с помощью производственной функции. Особое внимание уделено методике построения экономико-статистических моделей, их оценке и расчету аналитических характеристик. Определены параметры производственной функции в зависимости урожайности зерна озимой пшеницы от количества внесенных азотных и фосфорных удобрений в конкретном агропредприятии. Показано, что внесение азотных удобрений под пшеницу в анализируемом сельскохозяйственном предприятии неэффективно, а увеличение дозы фосфорных удобрений обусловливает заметный рост урожайности зерна.

Ключевые слова: продукция, коэффициент регрессии, сельскохозяйственное предприятие, производственная функция, затраты, прогнозирование, ресурс, экономико-математическая модель, специальные переменные, коэффициент.

В последнее время среди экономических исследований значительное распространение получили производственные функции, или, как их еще называют, производственные модели. Под производственными функциями (ПФ) обычно понимают модель затрат ресурсов (материальных, трудовых, финансовых) на выпуск готовой продукции [1–4].

Этот вид экономико-математических моделей обычно рассматривается как основной инструмент измерения и прогнозирования НТП. С точки зрения интеграции научно-технических и социально-экономических прогнозов от уравнений множественной регрессии общего типа они отличаются тем, что в подавляющем большинстве случаев содержат специальные переменные и коэффициенты для отражения технического прогресса [5–7].

Математической моделью производственной функции Кобба-Дугласа первоначально служило уравнение $y = a_0 K^{a_1} L^{1-a_1}$. Со временем его стали задавать в виде

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{\ 1-a_1} \ . \qquad (1)$$

Разделив обе части уравнения (1) на x_2, получим:

$$\frac{y}{x_2} = a_0 \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{a_1} . \qquad (2)$$

Прологарифмировав равенство (2), имеют

$$\lg\frac{y}{x_2} = \lg a_0 + a_1 \lg\frac{x_1}{x_2}. \tag{3}$$

Чтобы вычислить параметры линейной логарифмической зависимости (3), используя способ наименьших квадратов, записывают:

$$S = \sum\left(\lg a_0 + a_1\lg\frac{x_1}{x_2} - \lg\frac{y}{x_2}\right)^2 \to \min. \tag{4}$$

Частные производные функции S по неизвестным параметрам приравнивают к нулю:

$$\frac{\partial S}{\partial \lg a_0} = 2\sum\left(\lg a_0 + a_1\lg\frac{x_1}{x_2} - \lg\frac{y}{x_2}\right)\cdot 1 = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum\left(\lg a_0 + a_1\lg\frac{x_1}{x_2} - \lg\frac{y}{x_2}\right)\cdot \lg\frac{x_1}{x_2} = 0.$$

После упрощения получают следующую систему нормальных уравнений:

$$n\lg a_0 + a_1\sum\lg\frac{x_1}{x_2} = \sum\lg\frac{y}{x_2};$$

$$\lg a_0\sum\lg\frac{x_1}{x_2} + a_1\sum\lg^2\frac{x_1}{x_2} = \sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2}. \tag{5}$$

Рассчитаем корни этой системы с помощью определителей:

$$\Delta = n\sum\lg^2\frac{x_1}{x_2} - \left(\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\right)^2;$$

$$\Delta_{\lg a_0} = \sum\lg^2\frac{x_1}{x_2}\sum\lg\frac{y}{x_2} - \sum\lg\frac{x_1}{x_2}\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2};$$

$$\Delta a_1 = n\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2} - \sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2}.$$

Поэтому решением системы уравнений (5) является:

$$\lg a_0 = \frac{\sum\lg^2\frac{x_1}{x_2}\sum\lg\frac{y}{x_2} - \sum\lg\frac{x_1}{x_2}\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2}}{n\sum\lg^2\frac{x_1}{x_2} - \left(\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\right)^2}; \tag{6}$$

$$a_1 = \frac{n\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\lg\frac{y}{x_2} - \sum\lg\frac{x_1}{x_2}\sum\lg\frac{y}{x_2}}{n\sum\lg^2\frac{x_1}{x_2} - \left(\sum\lg\frac{x_1}{x_2}\right)^2}. \tag{7}$$

Последние две формулы можно свести к более простому виду:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\lg \frac{y}{x_2}}}{\sigma_{\lg \frac{x_1}{x_2}}} r_{\lg \frac{y}{x_2} \lg \frac{x_1}{x_2}} \quad ; \tag{8}$$

$$\lg a_0 = \lg \frac{\overline{y}}{x_2} - a_1 \lg \frac{\overline{x}_1}{x_2}, \tag{9}$$

где $\sigma_{\lg \frac{y}{x_2}}$, $\sigma_{\lg \frac{x_1}{x_2}}$ — средние квадратические отклонения логарифмов соответственно y / x_2 и x_1 / x_2; $r_{\lg \frac{y}{x_2} \lg \frac{x_1}{x_2}}$ — коэффициент парной линейной корреляции между логарифмами y / x_2 и x_1 / x_2; $\lg \frac{x_1}{x_2}, \lg \frac{y}{x_2}$ — средние арифметические логарифмов соответствующих показателей.

Определим параметры функции Кобба-Дугласа зависимости урожайности зерна озимой пшеницы (y) от количества внесенных азотных (x_1) и фосфорных (x_2) удобрений на сельскохозяйственном предприятии за последние 10 лет. Исходная информация для построения упомянутой производственной функции взята из данных ПК (производственный кооператив) «Шахтер» Карагандинской области и показана в таблице.

Система нормальных уравнений в рассматриваемом примере имеет вид:

$$\begin{aligned} &10 \lg a_0 - 0{,}9478 a_1 = -12{,}4283; \\ &-0{,}9478 \lg a_0 + 0{,}0997 a_1 = -1{,}2222. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений:

$$\lg a_0 = 0{,}817839; \; a_0 = 6{,}574142; \; a_1 = -4{,}483972.$$

Следовательно, производственная функция Кобба-Дугласа в рассматриваемом примере имеет следующий вид:

$$y = 6{,}574142 x_1^{-4{,}483972} x_2^{5{,}483972}.$$

На основе полученной производственной функции (1) вычислены теоретические уровни логарифмов зависимого показателя. Их сумма совпадает с суммой фактических уровней логарифмов того же признака.

В последнее время условие о том, что сумма коэффициентов регрессии в функции Кобба-Дугласа должна быть равной единице, снято, и ее обычно задают в таком виде [8–10]:

$$y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}. \tag{10}$$

Путем логарифмирования сводят эту функцию к линейному виду

$$\lg y = \lg a_0 + a_1 \lg x_1 + a_2 \lg x_2. \tag{11}$$

Чтобы определить параметры рассматриваемой зависимости, составляют и решают такую систему нормальных уравнений, как

$$\begin{aligned} &n \lg a_0 + a_1 \sum \lg x_1 + a_2 \sum \lg x_2 = \sum \lg y; \\ &\lg a_0 \sum \lg x_1 + a_1 \sum \lg^2 x_1 + a_2 \sum \lg x_1 \lg x_2 = \sum \lg x_1 \lg y; \\ &\lg a_0 \sum \lg x_2 + a_1 \sum \lg x_1 \lg x_2 + a_2 \sum \lg^2 x_2 = \sum \lg x_2 \lg y. \end{aligned} \tag{12}$$

Т а б л и ц а

Изменение урожайности озимой пшеницы (y) в зависимости от количества внесенных азотных (x_1) и фосфорных удобрений (x_2) в условиях ПК «Шахтер» Нуринского района Карагандинской области за 2000–2009 гг.

Годы	Азотные удобрения, ц/га	Фосфорные удобрения, ц/га	Урожайность, ц/га	Расчетные величины								Расчетные величины								
t	x_1	x_2	y	$\frac{x_1}{x_2}$	$\frac{y}{x_2}$	$\lg\frac{x_1}{x_2}$	$\lg\frac{y}{x_2}$	$\lg^2\frac{x_1}{x_2}$	$\lg\frac{x_1}{x_2}\, x\, x\lg\frac{y}{x_2}$	$\lg\overline{y}_x$	$\lg x_1$	$\lg x_2$	$\lg y$	$\lg^2 x_1$	$\lg^2 x_2$	$\lg x_1\ \lg x_2$	$\lg x_1\ \lg y$	$\lg x_2\ \lg y$	$\lg\tilde{y}_x$	$\lg^2\tilde{y}_x$
2000	0,5	0,7	25,1	0,7143	35,8571	-0,1461	1,5546	0,0213	-0,2271	1,3180	-0,3010	-0,1549	1,3997	0,0906	0,0240	0,0466	-0,4213	-0,2168	1,3895	1,9307
2001	0,7	1,0	27,3	0,7000	27,3000	-0,1549	1,4362	0,0240	-0,2225	1,5124	-0,1549	0,0000	1,4362	0,0240	0,0000	0,0000	-0,2225	0,0000	1,4416	2,0782
2002	1,0	1,3	29,9	0,7692	23,0000	-0,1140	1,3617	0,0130	-0,1552	1,4424	0,0000	0,1139	1,4757	0,0000	0,0130	0,0130	0,0000	0,1681	1,4792	2,1880
2003	1,4	1,7	33,0	0,8235	19,4118	-0,0843	1,2881	0,0071	-0,1086	1,4263	0,1461	0,2304	1,5185	0,0213	0,0531	0,0531	0,2219	0,3499	1,5178	2,3037
2004	1,7	2,1	34,8	0,8095	16,5714	-0,0918	1,2194	0,0084	-0,1119	1,5517	0,2304	0,3222	1,5416	0,0531	0,1038	0,1038	0,3552	0,4967	1,5487	2,3985
2005	2,0	2,4	36,7	0,8333	15,2917	-0,0792	1,1845	0,0063	-0,0938	1,5532	0,3010	0,3802	1,5647	0,0906	0,1446	0,1446	0,4710	0,5949	1,5679	2,4583
2006	2,4	2,8	38,5	0,8571	13,7500	-0,0670	1,1383	0,0045	-0,0763	1,5655	0,3802	0,4472	1,5855	0,1446	0,2000	0,2000	0,6028	0,7090	1,5903	2,5291
2007	2,7	3,1	40,3	0,8710	13,0000	-0,0600	1,1139	0,0036	-0,0668	1,5783	0,4314	0,4914	1,6053	0,1861	0,2415	0,2415	0,6925	0,7888	1,6049	2,5757
2008	3,0	3,5	42,6	0,8571	12,1714	-0,0670	1,0853	0,0045	-0,0727	1,6624	0,4771	0,5441	1,6294	0,2276	0,2960	0,2960	0,7774	0,8866	1,6227	2,6332
2009	3,3	4,0	44,5	0,8250	11,1250	-0,0835	1,0463	0,0070	-0,0874	1,7948	0,5185	0,6021	1,6484	0,2688	0,3625	0,3625	0,8547	0,9925	1,6424	2,6975
	Σ	х	х	х	х	-0,9478	12,4283	0,0997	-1,2223	15,4050	2,0288	2,9766	15,4050	1,1067	1,4385	1,2227	3,3317	4,7697	15,4050	23,7929
	Σ/n	х	х	х	х	-0,0948	1,2428	х	х	1,5405	0,2029	0,2977	1,5405	х	х	х	х	х	1,5405	х

Поскольку формулы, определяющие корни системы нормальных уравнений, громоздкие, приведем их к наиболее компактному виду:

$$a_1 = \frac{\sigma_{\lg y}\left(r_{\lg y \lg 1} - r_{\lg y \lg 2} r_{\lg 1 \lg 2}\right)}{\sigma_{\lg 1}\left(1 - r^2_{\lg 1 \lg 2}\right)}; \tag{13}$$

$$a_2 = \frac{\sigma_{\lg y}(r_{\lg y \lg 2} - r_{\lg y \lg 1} r_{\lg 1 \lg 2})}{\sigma_{\lg y 2}(1 - r^2_{\lg 1 \lg 2})}; \tag{14}$$

$$\lg a_0 = \overline{\lg y} - a_1 \overline{\lg 1} - a_2 \overline{\lg 2}, \tag{15}$$

где $\overline{\lg y}$, $\overline{\lg 1}$, $\overline{\lg 2}$, — средние уровни логарифмов зависимого (y) и соответствующих факторных признаков (x_1, x_2); $\sigma_{\lg y}$, $\sigma_{\lg 1}$, $\sigma_{\lg 2}$ — средние квадратические отклонения логарифмов соответствующих признаков.

Вместо системы (12) можно решать нормированную систему вида

$$\begin{aligned} &\beta_1 + \beta_2 r_{\lg 1 \lg 2} = r_{\lg y \lg 1}; \\ &\beta_1 r_{\lg 1 \lg 2} + \beta_2 = r_{\lg y \lg 2}, \end{aligned} \tag{16}$$

где $r_{\lg y \lg 1}$, $r_{\lg y \lg 2}$ — коэффициенты парной корреляции между логарифмами зависимого и соответствующего факторного признаков.

Решение системы уравнений (16):

$$\beta_1 = \frac{r_{\lg y \lg 1} - r_{\lg y \lg 2} r_{\lg 1 \lg 2}}{1 - r^2_{\lg 1 \lg 2}}; \tag{17}$$

$$\beta_2 = \frac{r_{\lg y \lg 2} - r_{\lg y \lg 1} r_{\lg 1 \lg 2}}{1 - r^2_{\lg 1 \lg 2}}. \tag{18}$$

Переход к обычным коэффициентам регрессии (a_j) от стандартизованных (β_j) ведется по формуле

$$a_j = \beta_j \sigma_{\lg y} / \sigma_{\lg j}, \tag{19}$$

т.е. в конце концов приходим к тем же формулам, которые приведены выше (13)–(15).

Вычислим параметры производственной функции Кобба-Дугласа (10) по данным таблицы. При этом система нормальных уравнений будет следующей:

$$\begin{gathered} 101ga_0 + 2{,}0288a_1 + 2{,}9766a_2 = 15{,}4050; \\ 2{,}0288\lg a_0 + 1{,}1067a_1 + 1{,}2227a_2 = 3{,}3317; \\ 2{,}9766\lg a_0 + 1{,}2227a_1 + 1{,}4385a_2 = 4{,}7697. \end{gathered}$$

Ее решением являются:

$$\lg a_0 = 1{,}4392472; \quad a_0 = 27{,}4946; \quad a_1 = -0{,}015221; \quad a_2 = 0{,}350537.$$

Поэтому исследуемая зависимость моделируется производственной функцией вида

$$y = 27{,}4946 x_1^{-0{,}015221} x_2^{0{,}350537}. \tag{20}$$

Коэффициенты регрессии (20) показывают, что внесение азотных удобрений под пшеницу на сельскохозяйственном предприятии неэффективно, а увеличение дозы фосфорных удобрений на 1 %

обусловливает рост урожайности зерна в среднем примерно на 0,35 %. Теснота связи в случае этой производственной функции очень высокая и составляет 0,9984, что намного выше, чем при использовании зависимости (1).

Список литературы

1 *Сио К.К.* Управленческая экономика: Пер. с англ. — М.: ИНФРА-М, 2000. — 671 с.

2 *Винн Р., Холден К.* Введение в прикладной эконометрический анализ: Пер. с англ. — М.: Финансы и статистика, 1981. — 294 с.

3 *Терехов Л.Л.* Производственные функции. — М.: Статистика, 1974. — 128 с.

4 *Баркалов Н.Б.* Производственные функции в моделях экономического роста. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981. — 128 с.

5 *Оппенлендер К.-Г.* Технический прогресс: воздействие, оценки, результаты: Сокр. пер. с нем. — М.: Экономика, 1981. — 176 с.

6 *Шелобаев С.И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. — 367 с.

7 *Каренов Р.С.* Экономическое прогнозирование: Учеб. — Караганда: Изд-во КарГУ, 2003. — 377 с.

8 *Монахов А.В.* Математические методы анализа экономики. — СПб.: Питер, 2002. — 176 с.

9 *Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н.* Математические методы в экономике: Учеб. — М.: МГУ им. М.В.Ломоносова; Изд-во «ДИС», 1997. — 368 с.

10 *Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н.* и др. Экономико-математические методы и модели: Учеб. пособие. — Минск: Изд-во БГЭУ, 1999. — 413 с.

Т.Б.Казбеков

Өндірістік функциялар көмегімен ауыл шаруашылығы кәсіпорындары жұмысының көрсеткіштерін экономикалық-математикалық модельдеу

Ауыл шаруашылығы кәсіпорындары көрсеткіштерін экономикалық-математикалық модельдеу әр алуан тұрғылардан қарастырылып жалпыланған. Экономикалық құбылыстар арасындағы байланыстар және оларды өндірістік функциялар көмегімен зерттеу амалдары қарастырылған. Экономикалық-статистикалық модельдер құруға, оларды бағалауға және олардың аналитикалық сипаттамаларын есептеуге айрықша көңіл бөлінген. Нақты аграрлық кәсіпорында күздік бидай түсімінің қолданылған азот және фосфор тыңайтқыштарының көлеміне тәуелсіздігінің өндірістік функциясының параметрлері анықталған. Талданған ауыл шаруашылығы кәсіпорында бидай егістіктеріне азот тыңайтқыштарын себу тиімсіз екені, ал фосфор тыңайтқыштарының мөлшерін арттыру астық түсімін едәуір көбейтетіні дәлелденген.

Various aspects of economic-mathematical modelling of indicators of work of the agricultural enterprises are generalised. Communications between economic events and receptions of their studying by means of production function are considered. The special attention is given a technique of construction of economic-statistical models, their estimation and calculation of analytical characteristics. Production function parametres in dependence of productivity of grain of a winter wheat on quantity of the brought nitric and phosphoric fertilizers in the concrete agroenterprise are defined. It is shown that entering of nitric fertilizers under wheat in the analyzed agricultural enterprise is inefficient, and the increase in a dose of phosphoric fertilizers causes appreciable growth of productivity of grain.