УДК 517.925.5

Б.Х.Жанбусинова, Б.К.Шаяхметова, А.К.Жанболова

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: kazahzavod@mail.ru)

Операторный метод решения дифференциально-разностного уравнения первого порядка

В статье рассмотрен новый метод построения решения дифференциально-разностного уравнения первого порядка. Решения уравнения даны в классе $C^1[t_0,t_1]$. Для решения введен интегральный оператор. Получены решение дифференциально-разностного уравнения в виде сходящегося ряда и оценки рассматриваемых операторов.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, процессы с последействием, отклонение аргумента, начальная функция, метод шагов, оператор, оценка.

Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом широко применяются в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, лазерной технологии, при долгосрочном прогнозировании в экономике, в экологии, иммунологии, при изучении ряда биофизических проблем и во многих других областях науки и техники, число которых неуклонно расширяется. Уравнения с отклоняющимся аргументом описывают процессы с последействием. Последействие, например, в эволюционирующей системе сказывается в том, что ее состояние в любой момент времени влияет на характер эволюции этой системы не только в тот же момент времени, но и в последующие. Математически это означает, что в дифференциальных уравнениях, описывающих это явление, появляются члены с запаздыванием.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с отклоняющимся аргументом первого порядка:

$$\frac{dx}{dt}=a(t)x(t-\Delta)+b(t), \tag{1}$$

где $a((t),b(t)\in C[t_0,t_1]$, $-\infty<t_0<t_1<\infty$, $\Delta>0$ — постоянная, характеризующая отклонение аргумента, причем на начальном множестве $E_{t_0}:t_0-\Delta\le t\le t_0$ задана начальная функция $x(t)=\varphi(t)$.

Решения уравнения (1) будем искать в пространстве $C^1[t_0,t_1]$. Наиболее известным методом решения основной начальной задачи является метод шагов, заключающийся в том, что решение рассматриваемой задачи определяется из дифференциального уравнения без отклонения. Этот метод дает возможность определить решение на некотором конечном отрезке.

Используем новый метод, суть которого состоит в введении интегрального оператора. Этот метод решения был использован для нахождения общих решений обыкновенных дифференциальных уравнений в работах [1–4]. Путем n-кратного интегрирования данного дифференциально-разностного уравнения получим интегральное уравнение, в правой части которого есть n-кратные интегралы с неизвестной функцией. При предельном переходе при $n\to\infty$ эти члены с неизвестной функцией исчезают, а оставшаяся часть дает искомое решение уравнения (1).

Проинтегрировав уравнение (1), получим:

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}a(\tau)\,x(\tau-\Delta)\,d\tau+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\;d\tau+\varphi(t_0). \tag{2}$$

Сделав под первым интегралом замену переменной и используя начальное условие $E_{t_0}:t_0-\Delta\le t\le t_0\;\; x(t)=\varphi(t)$, получим:

$$x(t)=\int_{t_0-\Delta}^{t-\Delta}a(s+\Delta)\,x(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,d\tau+\varphi(t_0)=\int_{t_0-\Delta}^{t_0}a(s+\Delta)\,x(s)ds+\int_{t_0}^{t-\Delta}a(s+\Delta)\,x(s)ds+$$

$$+\int_{t_0}^{t}b(\tau)\,d\tau+\varphi(t_0)==\int_{t_0-\Delta}^{t_0}a(s+\Delta)\varphi(s)ds+\int_{t_0}^{t-\Delta}a(s+\Delta)\,x(s)ds+\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau+\varphi(t_0). \tag{3}$$

Перепишем уравнение (3) в виде

$$x(t) = A\left[x(t)\right] + b_1(t) + C, \tag{4}$$

где $A\left[x(t)\right] = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)\,x(s)\,ds; \quad b_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)\,d\tau; \quad C = \int\limits_{t_0-\Delta}^{t_0} a(s+\Delta)\,\varphi(s)\,ds + \varphi(t_0).$

Действуя оператором A на уравнение (4), получим

$$A\left[x(t)\right] = A^2\left[x(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + Ca_0(t), \tag{5}$$

где $A^2\left[x(t)\right] = A\left[A\left[x(t)\right]\right]; \quad A\left[b_1(t)\right] = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)\,b_1(s)\,ds; \quad a_0(t) = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)\,ds.$

Подставим (5) в (4):

$$x(t) = A^2\left[x(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + b_1(t) + C(1 + a_0(t)). \tag{6}$$

Опять действуем оператором A на уравнение (6)

$$A\left[x(t)\right] = A^3\left[x(t)\right] + A^2\left[b_1(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + C(a_0(t) + a_1(t)), \tag{7}$$

где $A^3[x(t)] = A\left[A^2[x(t)]\right]; \quad A^2\left[b_1(t)\right] = A\left[A\left[b_1(t)\right]\right]; \quad a_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)\,a_0(s)\,ds.$

Подставим (7) в (4)

$$x(t) = A^3\left[x(t)\right] + A^2\left[b_1(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + b_1(t) + C(1 + a_0(t) + a_1(t)).$$

Продолжая этот процесс, получим

$$A\left[x(t)\right] = A^4\left[x(t)\right] + A^3\left[b_1(t)\right] + A^2\left[b_1(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + C(a_0(t) + a_1(t) + a_2(t)),$$

где $a_2(t) = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)a_1(t)\,ds,$ тогда

$$x(t) = A^4\left[x(t)\right] + A^3\left[b_1(t)\right] + A^2\left[b_1(t)\right] + A\left[b_1(t)\right] + b_1(t) + C(1 + a_0(t) + a_1(t) + a_2(t))$$

....

$$x(t) = A^n\left[x(t)\right] + \sum_{k=0}^{n-1} A^k\left[b_1(t)\right] + C\left(1 + \sum_{k=0}^{n-2} a_k(t)\right), \tag{8}$$

где $A^n\left[x(t)\right] = A\left[A^{n-1}\left[x(t)\right]\right]; \qquad A^1\left[x(t)\right] = A\left[x(t)\right] \quad (n = \overline{2,\infty}).$

$$A^0\left[b_1(t)\right] = b_1(t), \quad a_k(t) = \int\limits_{t_0}^{t-\Delta} a(s+\Delta)a_{k-1}(t) \quad \left(k = \overline{2,\infty}\right).$$

Оценим каждое слагаемое в (8). Пусть $\left|f\right|_0 = \max\limits_{t\in[t_0,t_1]}\left|f(t)\right|,$ тогда

при $n = 1$

$$\left|A\left[x(t)\right]\right| \le |a|_0\,|x|_0\,|t - \Delta - t_0|;$$

при $n = 2$:

$$\left|A^2\left[x(t)\right]\right| = \left|A\left[A\left[x(t)\right]\right]\right| \le |a|_0^2\,|x|_0 \left|\int\limits_{t_0}^{t-\Delta}(s - \Delta - t_0)\,ds\right| \le \frac{|a|_0^2\,|x|_0}{2}\left|(s - \Delta - t_0)^2\right|\Big|_{s=t_0}^{s=t-\Delta} =$$

$$= \frac{|a|_0^2\,|x|_0}{2}\left|(t - t_0 - 2\Delta)^2 - \Delta^2\right| =$$

$$= \frac{|a|_0^2\,|x|_0}{2}\left|(t - t_0 - \Delta)^2 - 2\Delta(t - t_0 - \Delta)\right| = \frac{|a|_0^2\,|x|_0}{2}|t - t_0 - \Delta||t - t_0 - 3\Delta|;$$

при $n = 3$:

$$\left|A^3\left[x(t)\right]\right| \le \frac{|a|_0^3\,|x|_0}{2}\left|\int_{t_0}^{t-\Delta}\left(t-t_0-\Delta\right)^2 - 2\Delta\left(t-t_0-\Delta\right)ds\right| \le \frac{|a|_0^3\,|x|_0}{2}\left|\frac{\left(s-\Delta-t_0\right)^3}{3} - \Delta\left(s-\Delta-t_0\right)^2\right|\Bigg|_{s=t_0}^{s=t-\Delta} =$$

$$= \frac{|a|_0^3\,|x|_0}{3!}\left|\left(t-t_0-\Delta-\Delta\right)^3 - (-\Delta)^3 - 3\Delta\left(t-t_0-\Delta-\Delta\right)^2 + 3\Delta^3\right| =$$

$$= \frac{|a|_0^3\,|x|_0}{3!}\left|\left(t-t_0-\Delta\right)^3 - 6\Delta\left(t-t_0-\Delta\right)^2 + 9\Delta^2\left(t-t_0-\Delta\right)\right| = \frac{|a|_0^3\,|x|_0}{3!}\left|t-t_0-\Delta\right|\left|\left(t-t_0-4\Delta\right)\right|^2.$$

Продолжая этот процесс, получим

$$\left|A^n\left[x(t)\right]\right| \le \frac{|a|_0^n\,|x|_0}{n!}\left|t-t_0-\Delta\right|\left|t-t_0-(n+1)\Delta\right|^{n-1} = \frac{|a|_0^n\,|x|_0}{n!}\left|t-t_0-\Delta\right|^n\left|1-\frac{n\Delta}{t-t_0-\Delta}\right|^{n-1}. \quad (9)$$

Аналогично получим оценки для $A^k\left[b_1(t)\right]$ и $a_k(t)$

$$\left|A^k\left[b_1(t)\right]\right| \le \frac{|a|_0^k\,|b_1|_0}{k!}\left|t-t_0-\Delta\right|\left|t-t_0-(k+1)\Delta\right|^{k-1} = \frac{|a|_0^k\,|b_1|_0}{k!}\left|t-t_0-\Delta\right|^k\left|1-\frac{k\Delta}{t-t_0-\Delta}\right|^{k-1};$$

$$\left|a_k(t)\right| \le \frac{|a|_0^k}{k!}\left|t-t_0-\Delta\right|\left|t-t_0-(k+1)\Delta\right|^{k-1} = \frac{|a|_0^k}{k!}\left|t-t_0-\Delta\right|^k\left|1-\frac{k\Delta}{t-t_0-\Delta}\right|^{k-1}. \quad (10)$$

Перейдем в (8) к пределу при $n\to\infty$, с учетом (9) и формулы предела из курса математического анализа $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$ (здесь a — действительное, n — целое число) [5] получим

$$x(t) = B(t) + C\left(1+F(t)\right),$$

где

$$B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k\left[b_1(t)\right]; \qquad F(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t). \quad (11)$$

Используя формулы (10), можно показать равномерную сходимость рядов (11).

Список литературы

1 *Tungatarov A.* Cauchy problem for a first order ordinary differential system in the plane // Материалы Междунар. науч.-практ. конф. «Актуальные проблемы информатики и процессов управления». — Алматы, 2012. — С. 48–51.

2 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* Cauchy problem for on class of ordinary differential equations // Int. Journal of Math. Analysis. — 2012. — No. 4. — Vol. 6. — P. 695–699.

3 *Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K.* General solution of second order linear ordinary differential equations with variable coefficients // Journal of Inequalitties and Special functions ISSN: 2217-4303,URL: http//www.ILIRIAS.com. — Vol. 3, 4 (2012). — P. 42–49.

4 *Тунгатаров А* Дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами. — Алматы: Қазақ ун-ті баспасы, 2014. — 100 с.

5 *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2 т. — Т. 1. — М.: Наука, 1966. — 607 с.

Б.Х.Жанбусинова, Б.К.Шаяхметова, А.К.Жанболова

Бірінші ретті дифференциалды-айырымдық теңдеуді шешудің операторлық әдісі

Мақалада бірінші ретті дифференциалды-айырымдық теңдеудің шешімін құрудың жаңа әдісі қарастырылған. Теңдеудің шешімдері $C^1\left[t_0,t_1\right]$ класында құрылған. Шешімді құру үшін интегралдық оператор енгізілген. Дифференциалды-айырымдық теңдеудің шешімі жинақталатын қатар түрінде және қарастырылып отырған операторлардың бағалары алынған.

B.Kh.Zhanbusinova, B.K.Shaykhmetova, A.K.Zhanbolova

Operator method of solving differential-difference equations of first order

This paper examines new method for solving differential-difference equation of first order. Solutions of the equation are constructed in a class $C^1[t_0, t_1]$. For creation of the decision the integrated operator is entered. The estimations of the examined operators are got. The decision of differential-difference equation is got as a converging row.

References

1 Tungatarov A. *Materials of the international scientific and practical conference «Actual Problems of Informatics and Management Processes»*, Almaty, November, 15, 16, 2012, p. 48–51.

2 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. *Int. Journal of Math. Analysis*, 2012, 4, 6, p. 695–699.

3 Tungatarov A., Akhmed-Zaki D.K. *Journal of Inequalitties and Special functions*, [ER]. Access mode: http//www.ILIRIAS.com, 3, 4, 2012, p. 42–49.

4 Tungatarov A. *Differential equations with variable coefficients*, Almaty: Publ. house Kazakh University, 2014,100 p.

5 Fikhtengolts G.M. *Course of differential and integral calculus*, 1, Moscow: Nauka, 1966, 607 p.