$$\left\|\{b_n\}\right\|_{p,q}^{*} < \infty \Leftrightarrow \left\|W(u)\right\|_{p',q} < \infty.$$

Аналоги теорем 1,2,3,4 для рядов по тригонометрическим системам ранее были доказаны в [2]. Более общее теоремы для рядов по тригонометрическим системам доказаны в [3].

Список использованной литературы

1. Б.И.Голубов, А.В. Ефимов, В.А. Скворцов. Ряды и преобразования Уолша, 1987.
2.Y.Sagher. An application of interpolation theory to Fouries series, Studia Math, 1972, 169-181.
3.M.Dyachenko, A. Mukanov, S.Tikhonov. Hardy-Littlewood theorems for trigonometric series with general monotone coefficients. StudiaMathematica, 250(3), 2020, p. 219-232.

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ КРАТНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ-ХААРА В АНИЗОТРОПНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

Тлеуханова Н.Т.[1],Баширова А.Н.[2]
[1]*Евразийский национальный университет имени Л.Н.Гумилева, Нур-Султан, Казахстан*
[2]*Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
E-mail: tleukhanova@rambler.ru, anar_bashirova@mail.ru

Аннотация. Исследованы мультипликаторы двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца. Получены необходимые и достаточные условия для того чтобы последовательность $\lambda = \{\lambda_{k_1k_2}^{j_1j_2}\}$ принадлежала классу мультипликаторов $m\left(L_{\bar{p},\bar{r}} \quad \to L_{\bar{q},\bar{s}}\right)$.

Пусть X, Y- пространства функций, определенных на отрезке $[0,1]$, таких, что$X \hookrightarrow L_1$. Пусть $\{\varphi_k\}$- полная ортонормированная система. Пусть функции $f \in X$соответствует ее ряд Фурье по данной системе $\{\varphi_k\}$

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k,$$

где a_k- коэффициенты Фурье функции fпо системе $\{\varphi_k\}$. Будем говорить, что последовательность комплексных чисел $\lambda = \{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ является мультипликатором рядов Фурье по системе $\{\varphi_k\}$ из пространства Хв пространство Y, если для функции f ∈ Xc рядом Фурье

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k$$

найдется функция $f_\lambda \in Y$, ряд Фурье которой совпадает с рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k \varphi_k$$

и оператор $\Lambda f = f_\lambda$является ограниченным оператором из Хв Y.

Множество $m(X \to Y)$ всех определенных таким образом мультипликаторов является линейным нормированным пространством с нормой $\|\lambda\|_{m(X\to Y)} = \|\Lambda\|_{X\to Y}$.

Рассмотрим последовательность $\lambda = \{\lambda_k^j\}_{(k,j)\in\Omega}$. Всякая последовательность λпорождает оператор Λ, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$\Lambda\left(\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{2^k} a_k^j(f)\,\chi_k^j(x)\right) = \sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{2^k} \lambda_k^j a_k^j\,\chi_k^j(x).$$

Исследованию мультипликаторов рядов Фурье по системе Хаара в одномерном случае посвящены работы [1-9]. Вопрос о мультипликаторах кратных рядов Фурье-Хаара оставался открытым.

Целью нашей работы является исследование мультипликаторов двойных рядов Фурье-Хаара в анизотропных пространствах Лоренца.

Пусть f измеримая функция, принимающая почти всюду конечные значения:

$$m(\sigma, f) = \mu(\{x: x \in [0,1], |f| > \sigma\})$$

её функция распределения. Функция:

$$f^*(t) = inf\{\sigma: m(\sigma, f) \le t\}, \quad t > 0$$

называется невозрастающей перестановкой функции f.

Пусть $f(x_1, x_2)$ - измеримая на $[0,1]^2$ функция, через $f^{*_1 *_2}(t_1, t_2)$ обозначим функцию, полученную применением невозрастающей перестановки к функции $f(x_1, x_2)$ последовательно по переменным x_1, x_2.

Пусть $\bar{p} = (p_1, p_2)$, $\bar{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$ такие, что если $0 < p_i < \infty$, то $0 \le \tau_i \le \infty$, если $p_i = \infty$, то и $\tau_i = \infty$, $i = 1, 2$. Анизотропным пространством Лоренца $L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2$[10] назовем множество функций, для которых конечна величина:

$$\|f\|_{L_{\bar{p},\bar{\tau}}[0,1]^2} = \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(t_2^{\frac{1}{p_2}} t_1^{\frac{1}{p_1}} f^{*_1 *_2}(t_1, t_2) \right)^{\tau_1} \frac{dt_1}{t_1} \right)^{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \frac{dt_2}{t_2} \right)^{\frac{1}{\tau_2}}.$$

Здесь и далее, когда $\tau = \infty$, интеграл $\left(\int_0^1 (\varphi(t))^{\tau} \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\tau}}$ понимается как $\sup\limits_{t>0} \varphi(t)$.

Тогда верна следующая теорема.

Теорема 1. Пусть $1 < \bar{p} < \bar{q} < \infty$, $0 < \bar{r}, \bar{s} \le \infty$, $\frac{1}{\xi_i} = \left(\frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i} \right)_+ = max\left\{ \frac{1}{s_i} - \frac{1}{r_i}, 0 \right\}$, $i = 1, 2$.

Тогда последовательность комплексных чисел $\lambda = \left\{ \lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \right\}_{(k_i, j_i) \in \Omega}$ является мультипликатором из $L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2$ в $L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2$ тогда и только тогда, когда

$$\left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left| \lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \right| \right)^{\xi_1} \right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \right)^{\frac{1}{\xi_2}} < \infty$$

и верно

$$\|\lambda\|_{m\left(L_{\bar{p},\bar{r}}[0,1]^2 \to L_{\bar{q},\bar{s}}[0,1]^2\right)} \asymp \left(\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \left(2^{k_1\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{q_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2}\right)} \sup_{\substack{1 \le j_i \le 2^{k_i} \\ i=1,2}} \left| \lambda_{k_1 k_2}^{j_1 j_2} \right| \right)^{\xi_1} \right)^{\frac{\xi_2}{\xi_1}} \right)^{\frac{1}{\xi_2}}.$$

Здесь и далее в случае, когда $\xi_i = +\infty$, соответствующая сумма в выражении справа заменяется на супремум.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Республики Казахстан, грант AP14870361.

Список использованной литературы

1 Burkholder D.L. A nonlinear partial differential equation and unconditional constant of the Haar system in L_p // Bull. Amer. Math. Soc. – 1982. – Vol. 7. – P. 591-595.

2 Yano S. On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. – 1959. – Vol. 11. – P. 195-215.

3 Novikov I., Semenov E. Haar series and linear operators. – Dordrecht: Cluver Acad. Publ. – 1997. – 218 p.

4 Кротов В.Г. О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ_{ω}^{p}// Мат. заметки. – 1978. – Т. 23, №5. – С. 685-695.

5 Брыскин И.Б., Лелонд О.В., Семенов Е.М. Мультипликаторы рядов Фурье – Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2000. – Т. 41, №4. – С. 758-766.

6 Girardi M., Operator-valued Fourier Haar multipliers // J. Math. Anal. Appl. – 2007. – Vol. 325. – P. 1314-1326.

7 Лелонд О.В., Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Пространство мультипликаторов Фурье-Хаара // Сиб. мат. журнал. – 2005. – Т. 46, №1. – С. 130-138.

8 Семенов Е.М., Уксусов С.Н. Мультипликаторы рядов по системе Хаара // Сиб. матем. журнал. – 2012. – Т. 53, №2. – С. 388-395.

9 Wark H.M. Operator-valued Fourier Haar multipliers on vector-valued L_1spaces // J. Math. Anal.Appl. – 2017. – Vol. 450. – P. 1148-1156.

10 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Докл. РАН. – 2004. – Т. 394(1). – С. 1-4.