УДК 519. 85.316

С.А.Искаков

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНКИ С ЗАЖАТЫМ КРАЕМ

Бигармоникалық теңдеудің шешімі үшін екі жақты бағалары келтіріліп, негізделген. Жуық шешімнің дәрежелік қатарға аз параметрі бойынша жіктелуі қолданылған.

In the article bilateral estimations for the decision of the biharmonic equation are resulted and explaineded. Decomposition of the approached decision in degree row by small parametre is used.

Рассмотрим задачу о поперечном изгибе тонкой пластины с зажатым краем, математическая постановка которой приводит к решению бигармонического уравнения

$$Au \equiv P\Delta\Delta u = f(x), \; x \in D \subset R^2 \tag{1}$$

с краевым условием на $\gamma = \partial D$

$$B_0 u\Big|_\gamma \equiv u\Big|_\gamma = 0, \; B_1 u\Big|_\gamma \equiv \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma = 0, \tag{2}$$

здесь $u = u(x)$ — поперечный прогиб серединной плоскости пластинки; $f(x)$ — интенсивность внешней нагрузки; P — цилиндрическая жесткость пластинки; $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по внутренней нормали к γ.

Пусть $f \in L_2(D)$, $\gamma \in C^4(D)$. Тогда решение задачи (1), (2) существует, единственно, $u \in W_2^4(D)$ и выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W_2^4(D)} \le c_1 \|f\|_{L_2(D)}. \tag{3}$$

В соответствии с методом фиктивных областей [1–4] в составной области $D_0 = D \cup D_1$ с границей $\Gamma = \partial D_0 \in C^4$ рассмотрим вспомогательную задачу для задачи (1), (2).

$$\begin{cases} Au_\varepsilon = f, x \in D; \\ B_i u_\varepsilon\Big|_{\gamma^+} = B_i u_\varepsilon\Big|_{\gamma^-}, i = 1,2; \\ B_j u_\varepsilon\Big|_{\gamma^+} = \dfrac{Q}{\varepsilon} B_j u_\varepsilon\Big|_{\gamma^-}, j = 2,3; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{Q}{\varepsilon} Au_\varepsilon = 0, x \in D_1 \\ B_i u_\varepsilon\big|_\Gamma = 0, i = 0,1 \end{cases}. \tag{4}$$

Через $B_j v, j = 2,3$ обозначены выражения

$$B_2 v \equiv P\left[\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} + \sigma\left(\frac{\partial^2 v}{\partial s^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial n}\right)\right];$$

$$B_3 v \equiv P\left[\frac{\partial}{\partial n}\Delta v + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\frac{\partial^2 v}{\partial n \partial s}\right],$$

в которых $\dfrac{\partial}{\partial s}$ обозначает дифференцирование по длине дуги γ; σ — постоянная Пуассона, такая, что $0 < \sigma < 1$; $\rho = \rho(x)$ — радиус кривизны γ в точке $x \in \gamma$; Q — параметр, принимающий значения 1 и –1.

Условия согласования на γ в задаче (4) имеют простой физический смысл: при переходе через γ непрерывны поперечный прогиб пластинки и угол поворота элемента контура γ, а усилия и моменты, действующие на элементы контура γ, равны по величине и противоположны по направлению. При этом вспомогательная задача — задача о поперечном изгибе тонкой пластинки с кусочнопостоянным коэффициентом цилиндрической жесткости, опертой в фиктивной области D_1 на твердое упругое основание с коэффициентом податливости $\varepsilon^{-1}\times Q$.

Решение задачи (4) будем искать в виде рядов

$$\Omega_1=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k v_k, x\in D;\ \Omega_2=\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k y_k, x\in D_1. \tag{5}$$

Для определения членов v_k, y_k подставим (5) в уравнение (4). Приравнивая выражения при одинаковых степенях ε, получим системы задач для нахождения v_k, y_k

$$\begin{cases} Av_0=f, x\in D; \\ B_i v_0\big|_\gamma=0, i=0,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ay_1=0, x\in D_1; \\ Q\varepsilon^{-1}B_j y_1\big|_\gamma=B_j v\big|_\gamma; j=2,3; \\ B_i y_1\big|_\Gamma=0; i=0,1; \end{cases}$$

для $k\ge 1$ (6)

$$\begin{cases} Av_k=0, x\in D; \\ B_i v_k=B_i y_k\big|_\gamma, i=0,1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} Ay_{k+1}=0, x\in D_1; \\ Q\varepsilon^{-1}B_j y_{k+1}\big|_\gamma=B_j v\big|_\gamma; j=2,3; \\ B_i y_{k+1}\big|_\Gamma=0; i=0,1. \end{cases}$$

Теорема 1. Существует ε_0, что для всех $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ряды Ω_1, Ω_2, определенные формулой (5), абсолютно сходятся в $W_2^4(D)$, $W_2^4(D_1)$, соответственно, и имеет место равенство

$$u_\varepsilon=\Omega_1, x\in D;\ u_\varepsilon=\Omega_2, x\in D_1, \tag{7}$$

где u_ε — решение (4).

Доказательство. Из теории эллиптических уравнений известно, что при сделанных выше предположениях уравнения из системы (6) имеют единственные решения и справедливы оценки, доставляемые теорией неоднородных граничных задач [5]

$$c_2\|v_k\|_{w_2^4(D)}\le\sum_{i=0}^{1}\|B_i v_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}\le c_3\|v_k\|_{w_2^4(D)}, k\ge 1; \tag{8}$$

$$c_4\|y_k\|_{w_2^4(D_1)}\le\sum_{i=0}^{1}\|B_i y_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\Gamma)}+\sum_{i=2}^{3}\|B_i y_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}\le c_5\|y_k\|_{w_2^4(D_1)}. \tag{9}$$

Используя (9) к граничным условиям для задачи относительно y_k, находим, что

$$c_4\|y_k\|_{w_2^4(D_1)}\le\sum_{i=2}^{3}\|B_i y_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}=\sum_{i=2}^{3}\|B_i v_{k-1}\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}.$$

Оценим правую часть неравенства (5), тогда

$$\|y_k\|_{w_2^4(D_1)}\le c_6\|v_{k-1}\|_{w_2^4(D)}. \tag{10}$$

Совершенно аналогично поступаем для $v_k, k\ge 1$

$$c_2\|v_k\|_{w_2^4(D)}\le\sum_{i=0}^{1}\|B_i v_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}=\sum_{i=0}^{1}\|B_i y_k\|_{w_2^{4-i-\frac12}(\gamma)}\le c_7\|y_k\|_{w_2^4(D_1)}.$$

Принимая во внимание (10), окончательно получаем

$$\|v_k\|_{w_2^4(D)}\le c_8\|v_{k-1}\|_{w_2^4(D)}, k\ge 1. \tag{11}$$

При $\varepsilon<\varepsilon_0=c_8^{-1}$ с помощью оценок (10), (11) устанавливаем абсолютную сходимость рядов Ω_1, Ω_2 в нормах пространств $W_2^4(D)$, $W_2^4(D_1)$.

Умножим уравнения из системы (6) относительно v_k, y_k на ε^k и просуммируем по всем k. Учитывая ограниченность оператора A, действующего из $W_2^4(D)$ в $L_2(D)$ и из $W_2^4(D_1)$ в $L_2(D_1)$, находим, что полученная задача

$$A\Omega_1 = f, x \in D;$$
$$B_i\Omega_1\Big|_\gamma = B_i\Omega_2\Big|_\gamma;$$
$$B_j\Omega_1\Big|_\gamma = Q\varepsilon^{-1}B_j\Omega_2\Big|_\gamma, j = 2,3;$$
$$Q\varepsilon^{-1}A\Omega_2 = 0, x \in D;$$
$$B_i\Omega_2\Big|_\Gamma = 0, i = 0,1$$

совпадает с (4). Поэтому при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеет место равенство (7), теорема 1 доказана.

Обозначим через u_ε^+ решение вспомогательной задачи (4), с параметром $Q = 1$, для которого, в силу теоремы 1, имеют место следующие разложения:

$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^+, x \in D;$$
$$u_\varepsilon^+ = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^+, x \in D_1, \quad (12)$$

где v_k^+, y_k^+ — решение из системы (6) при $Q = 1$. Точно также для решения u_ε^- задачи (4) при $Q = -1$ справедливы равенства

$$u_\varepsilon^- = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k^-, x \in D; \quad u_\varepsilon^- = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k y_k^-, x \in D_1, \quad (13)$$

через v_k^-, y_k^- обозначены решения (6) $Q = -1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$v_k^+ = v_k^-, \ k \text{ — четное};$$
$$v_k^+ = -v_k^-, \ k \text{ — нечетное}. \quad (14)$$

Используя (14), перепишем разложения (12), (13) в исходной области D в следующем виде:

$$u_\varepsilon^+ = u + \varepsilon v_1^+ + 0(\varepsilon^2); \ u_\varepsilon^- = u - \varepsilon v_1^+ + 0(\varepsilon^2), \quad (15)$$

где u — решение задачи (1), (2).

Поскольку главные члены погрешностей в разложениях (15) имеют разные знаки, то справедлива

Теорема 2. Пусть $f \in C(D)$, u — решение (1), (2), $u_\varepsilon^+, u_\varepsilon^-$ — решения (4), соответствующие выбору $Q = 1$ и $Q = -1$. Тогда для всех $x \in D$ и $\varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства

$$o(\varepsilon^2) + \min\left\{u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x)\right\} \le u(x) \le \max\left\{u_\varepsilon^+(x), u_\varepsilon^-(x)\right\} + o(\varepsilon^2)$$

и оценки точности

$$\max\left|u(x) - u_\varepsilon^\pm(x)\right| \le c_9\varepsilon. \quad (16)$$

Точность получаемых двусторонних приближений в данном случае ограничена оценкой (16). Для того, чтобы получить двусторонние оценки решения $u(x)$ с заданной точностью ε^s, применим идею экстраполяции Ричардсона. Построим экстраполированные решения $U_s^\pm$, являющиеся линейной комбинацией $u_{\varepsilon_k}^\pm$ с некоторыми весами

$$U_s^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+; \ U_s^- = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^-, x \in D. \quad (17)$$

Конкретный вид коэффициентов γ_k зависит от выбора последовательностей $\varepsilon > \varepsilon_1 > ... > \varepsilon_s > 0$ и показателя точности s. Наиболее распространенным является выбор

$$\varepsilon_л = \frac{\varepsilon}{k}, k = 1,...,s, \quad (18)$$

при котором коэффициент γ_k находится в явной форме

$$\gamma_k = \frac{(-1)^{s-k} k^s}{k!(s-k)!}, \; k = 1,...,s \tag{19}$$

и удовлетворяет условиям

$$\sum_{k=1}^{s} \gamma_k = 1; \;\; \sum_{k=1}^{s} \frac{\gamma_k}{k^j} = 0, \, j = 1,...,s-1.$$

При таком способе задания ε_k, γ_k находим, что

$$U_s^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u_{\varepsilon_k}^+ = \sum_{k=1}^{s} \gamma_k u + \sum_{k=1}^{s-1} \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \left(\frac{\varepsilon}{j}\right)^k v_k + \sum_{k=1}^{s} \gamma_k \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right) =$$

$$= u\sum_{k=1}^{s} \gamma_k + \sum_{k=1}^{s-1} \varepsilon^k v_k + \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^k + \varepsilon^s v_s^+ \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \left(\frac{1}{j}\right)^s + o\left(\varepsilon^{s+1}\right) = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right).$$

Совершенно аналогично

$$U_s^- = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^- + o\left(\varepsilon^{s+1}\right).$$

Пусть s — нечетное, тогда $v_s^+ = -v_s^-$ и, значит,

$$U_s^+ = u + c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right);$$

$$U_s^- = u - c_{11}\varepsilon^s v_s^+ + o\left(\varepsilon^{s+1}\right). \tag{20}$$

С помощью этого представления доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $f \in C(D)$, u — решение (4), u_ε^+, u_ε^- — решения (4), соответствующие выбору $Q = 1$, $Q = -1$. Тогда для всех $x \in D$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеют место асимптотические поточечные двусторонние неравенства*

$$o(\varepsilon^{s+1}) + \min\left\{U_s^+(x), U_s^-(x)\right\} \le u(x) \le \max\left\{U_s^+(x), U_s^-(x)\right\} + o(\varepsilon^{s+1}) \tag{21}$$

и оценки близости

$$\max_{x \in \bar{D}} \left| u(x) - U^{\pm}(x) \right| \le c_{12}\varepsilon^s; \;\; \max_{x \in \bar{D}} \left| u(x) - \frac{1}{2}(U_s^+(x) + U_s^-(x)) \right| \le c_{13}\varepsilon^{s+1}, \tag{22}$$

где s *— нечетное, а U_s^+, U_s^- определяются по формуле (20).*

Список литературы

1. *Коновалов А.Н.* Метод фиктивных областей в задачах кручения // Численные методы механики сплошной среды: Сб. — Новосибирск, 1972. — Т. 3. — № 5. — С. 52–67.
2. *Букенов М.М.* Малые параметры в алгоритмах решения задач теории упругости: Дис. … канд. физ.-мат. наук. — Новосибирск, 1986. — 123 с.
3. *Chertova E.* Locally two-sided approximate solutions in parabolic problems // Bull. Nov. Comp. Center, Num. Anal. — 1994. — Vol. 6. — P. 37–42.
4. *Букенов М.М.* Двусторонние оценки для сеточной задачи в методе фиктивных областей // Вестн. Карагандинского ун-та. — 2008. — № 4(48). — С. 6–11.
5. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М., 1964.